LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
8. Juli 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei A ein Integritätsbereich und K sein Quotientenkörper.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   i) A ist ein Bewertungsring von K;
   ii) Wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale von A sind, dann gilt entweder $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

b) Folgern Sie, dass für einen Bewertungsring A und ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A gilt, dass $A_{\mathfrak{p}}$ und $A/\mathfrak{p}$ Bewertungsringe ihrer Quotientenkörper sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei A ein Bewertungsring, der kein Körper ist. Zeigen Sie:
A ist ein noetherscher Ring genau dann, wenn A ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei k ein Körper, x ein transzendentes Element über k, $y_i := x^{1/2^i}$ ein Element im algebraischen Abschluss $\overline{k(x)}$. Wir betrachten nun die Ringe

$$k[y_0] \subseteq k[y_1] \subseteq k[y_2] \subseteq \ldots \subseteq \overline{k(x)}.$$

Zudem definieren wir $\mathfrak{P}_i := (y_i)$, $R_i := k[y_i]_{\mathfrak{P}_i}$ und damit $R := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} R_i$.

a) Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist.
   Hinweis: Es muss hier auch gezeigt werden, dass R ein Ring ist. Dafür können Sie zuerst zeigen, dass $\mathfrak{P}_{i+1} \cap k[y_i] = \mathfrak{P}_i$ und daraus folgern, dass $R_i \subseteq R_{i+1}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass R ein Bewertungsring ist, d.h. für $x \in \mathrm{Quot}(R)$ gilt $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

c) Zeigen Sie, dass R kein noetherscher Ring ist.

Hinweis: Da jeder Bewertungsring lokal ist, haben wir also ein Beispiel für einen lokalen Ring gefunden, der nicht noethersch ist. Mit Aufgabe 2 ist dies auch ein Beispiel für einen Bewertungsring, der kein diskreter Bewertungsring ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Montag, 15. Juli 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.