Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
18. Juli

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei $b \in B$ ganz über A, und b erfülle die Gleichung $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ für $a_i \in A$ und $n \geq 2$. Da $0, a_0 \in A$, gilt $b^n + \ldots + a_1 b = -a_0 \in A$. Wir können ein b herausheben und erhalten

$$b(b^{n-1} + \ldots + a_1) \in A,$$

und da $B \setminus A$ multiplikativ abgeschlossen ist, gilt entweder $b \in A$ oder $b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1 \in A$. Wenn wir diesen Prozess fortführen erhalten wir schließlich $b + a_{n-1} \in A$, und somit $b \in A$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Da diese Aussage nicht nur für einen Integritätsbereich sondern allgemeiner für einen kommutativen Ring gilt, wollen wir die Aussagen auch in dieser Allgemeinheit beweisen.

a) Sei $a/s = b/t \in S^{-1}A$. Dann gibt es ein $u \in S$ so dass $uta = usb$ in A gilt. Wenden wir nun $\sigma \in G$ darauf an, erhalten wir $\sigma(u)\sigma(t)\sigma(a) = \sigma(u)\sigma(s)\sigma(b) \in A$, d.h. $\sigma(a)/\sigma(s) = \sigma(b)/\sigma(t)$ in $S^{-1}A$.
Also können wir die Wirkung von G auf $S^{-1}A$ definieren durch $\sigma(a/s) := \sigma(a)/\sigma(s)$, wobei wir durch das oben gezeigte die Wohldefiniertheit bekommen. Wir zeigen die Additivität:

$$\sigma\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) = \frac{\sigma(at+bs)}{\sigma(st)} = \frac{\sigma(a)\sigma(t) + \sigma(b)\sigma(s)}{\sigma(s)\sigma(t)} = \frac{\sigma(a)}{\sigma(s)} + \frac{\sigma(b)}{\sigma(t)} = \sigma\left(\frac{a}{s}\right) + \sigma\left(\frac{b}{t}\right).$$

Für jedes $a \in A^G$, gilt $\sigma(a/1) = \sigma(a)/1 = a/1$, also faktorisiert die natürliche Abbildung $A^G \subseteq A \to S^{-1}A$ als $A^G \to (S^{-1}A)^G \subseteq S^{-1}A$. Jedes Element $s \in S^G$ wird eine Einheit in $S^{-1}A$, also auch eine Einheit in $(S^{-1}A)^G$, da $\sigma(1/s) = \sigma(1)/\sigma(s) = 1/s$ für alle $\sigma \in G$ gilt. Dann gibt es also einen eindeutigen Homomorphismus:

$$\begin{aligned} \phi : (S^G)^{-1}A^G &\to (S^{-1}A)^G, \\ \frac{a}{s} &\mapsto \frac{a}{s}. \end{aligned}$$

Behauptung: ϕ ist injektiv.
Sei $a/s = 0$ in $(S^{-1}A)^G \subseteq S^{-1}A$. Dann gibt es ein $t \in S$, so dass $ta = 0$. Wenn wir nun $t' = \prod_{\sigma \in G} \sigma(t)$ setzen, gilt $t'a = 0$, also gilt $a/s = 0$ schon in $(S^G)^{-1}A^G$.
Behauptung: ϕ ist surjektiv.
Sei $a/s \in (S^{-1}A)^G$ und sei $s' = \prod_{\sigma \neq \mathrm{id}_A} \sigma(s) \in S^G$. Dann ist $as'/1$ invariant, da es Produkt von a/s und $ss'/1$ ist welche selbst invariant sind. Also gilt für alle $\sigma \in G$:

$$\sigma(as'/1) = as'/1,$$

und somit gibt es ein $t_\sigma \in S$ so dass $t_\sigma as' = t_\sigma \sigma(as')$. Setzen wir nun $t = \prod_{\tau \in G} \tau(\prod_{\sigma \in G} t_\sigma) \in S^G$. Da nun $t_\sigma \mid t$, erhalten wir $\sigma(tas') = t\sigma(as') = tas'$, also $tas' \in A^G$. Schließlich folgt $a/s = ts'a/ts's$ mit $ts'a \in A^G$ und $ts's \in S^G$, also ist ϕ surjektiv.

b) Seien nun wie in der Anleitung $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in P$. Für jedes $x \in \mathfrak{P}_1$, gilt $\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in A^G \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}$. Aber ebenso gilt $\mathfrak{p} = A^G \cap \mathfrak{P}_2$, also $\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \mathfrak{P}_2$. Da $\mathfrak{P}_1$ prim ist, gilt für ein $\sigma \in G$: $y = \sigma(x) \in \mathfrak{P}_2$. Dann erhalten wir $x = \sigma^{-1}(y) \in \sigma^{-1}(\mathfrak{P}_2)$. Da $x \in \mathfrak{P}_1$ beliebig war, erhalten wir $\mathfrak{P}_1 \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{P}_2)$. Mit Lemma 6.1.3 erhalten wir, dass $\mathfrak{P}_1 \subseteq \sigma(\mathfrak{P}_2)$ für ein $\sigma \in G$ gilt. Da $\mathfrak{P}_1 \cap A^G = \mathfrak{p}$ und

$$\sigma(\mathfrak{P}_2) \cap A^G = \sigma(\mathfrak{P}_2) \cap \sigma(A^G) = \sigma(\mathfrak{P}_2 \cap A^G) = \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$$

gilt, bekommen wir aus Folgerung 7.3.3. $\mathfrak{P}_1 = \sigma(\mathfrak{P}_2)$. Da $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ beliebig waren, folgt, dass G jedes Element aus P auf jedes andere Element auf P schickt, also wirkt G transitiv. Da G endlich ist und G das Primideal $\mathfrak{P}_1$ zu jedem Element von P schickt, erhalten wir $|P| = |G|/|\mathrm{Stab}_G(\mathfrak{P}_1)| \leq |G|$, und somit haben wir gezeigt, dass auch P endlich ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
(a): S ist endlich erzeugt über R, also ist die Ringerweiterung $R \subseteq S$ ganz und es genügt zu zeigen, dass der Ring R normal ist. Da $R = (K[X])[Y]$ ein Polynomring über einem faktoriellen Ring ist, ist R selbst faktoriell (siehe Satz 2.4.10. in der Algebra) und die Aussage folgt aus Satz 7.2.1.

(b): Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\Theta\colon R \to K[Y], \quad f(X,Y) \mapsto f(Y,Y)$$

einen Isomorphismus $R/P \cong K[Y]$ induziert. Letzteres impliziert gerade, dass P ein Primideal ist.

Die Abbildung Θ ist offensichtlich surjektiv und $P \subseteq \ker\Theta$ ist ebenfalls klar. Angenommen, es gilt $P \subsetneq \ker\Theta$. In diesem Fall hätten wir eine Kette

$$(0) \subsetneq P \subsetneq \ker\Theta$$

in R. Da die Ringerweiterung $R \subseteq S$ ganz ist, ist $\dim R = \dim K[X,Y]$ (das wurde laut Assistent in der Übung gezeigt) und somit haben wir $\dim R = 2$ (Tutorium 10 - Aufgabe 3). Obige Kette von Primidealen erzwingt daher, dass $\ker\Theta$ maximal sein muss. Da $R/\ker\Theta \cong K[Y]$ kein Körper ist, führt dies jedoch zu einem Widerspruch.

Die Inklusion $P \subseteq Q'$ ist wiederum klar, da

$$a - (Y^2 - 1) \in Q' \quad \text{und} \quad b - Y(Y^2-1) \in Q'.$$

(c): Wie in (b) zeigt man, dass Q genau der Kern der Abbildung

$$\Phi\colon K[X,Y] \to K[Y], \quad f(X,Y) \mapsto f(Y,Y)$$

ist. Die Einschränkung dieser Abbildung auf R ist natürlich gerade Θ, d. h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[X,Y] \arrow[r, "\Phi"] & K[Y] \\ R \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Theta"] & K[Y] \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

und somit ist $\ker \Theta = P$ gerade der Pull-back von $\ker \Phi = Q$ bezüglich der Inklusion $R \hookrightarrow S$. Anders ausgedrückt: $Q \cap R = P$. Die Eindeutigkeitsaussage in der Aufgabenstellung bekommt man aus Folgerung 7.3.3.

Um ein Gegenbeispiel zu Going-down zu erhalten, kann man nun die Ketten

$$0 \subsetneq P \subsetneq Q' \cap R \quad \text{bzw.} \quad 0 \subsetneq Q$$

verwenden. Dazu zeigen wir, dass $Q \nsubseteq Q'$. Das Ideal Q' ist genau der Kern von

$$\Xi\colon K[X,Y] \to K, \quad f(X,Y) \mapsto f(1,-1).$$

Wegen $\Xi(X-Y) = 1-(-1) = 2 \neq 0$, da $\operatorname{char} K \neq 2$, haben wir also $X - Y \notin Q'$.