LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
24. Juni 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei A ein Unterring vom Ring B, so dass $B \setminus A$ abgeschlossen unter Multiplikation ist. Zeigen Sie, dass A ganz abgeschlossen in B ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Sei A ein Integritätsbereich und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von A. Sei

$$A^G = \{a \in A \mid \sigma(a) = a \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

der Ring der G-Invarianten. Wir haben bereits im Tutorium (Blatt 9, Aufgabe 4) gezeigt, dass A ganz über A^G ist.
Sei nun S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, so dass $\sigma(S) \subseteq S$ für alle $\sigma \in G$ gilt, und sei $S^G = S \cap A^G$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Wirkung von G auf A zu einer Wirkung auf $S^{-1}A$ erweitern lässt, und dass gilt: $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

b) Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A^G, und sei P die Menge Primideale von A deren Rückzug $\mathfrak{p}$ ist, d.h. $P = \{\text{Primideale } \mathfrak{P} \text{ von } A \mid \mathfrak{P} \cap A^G = \mathfrak{p}\}$.
Zeigen Sie, dass G transitiv auf P wirkt und dass P endlich ist.
Hinweis/Anleitung: Seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in P$ und sei $x \in \mathfrak{P}_1$. Dann ist $\prod_\sigma \sigma(x) \in \mathfrak{P}_1 \cap A^G = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P}_2$, also $\sigma(x) \in \mathfrak{P}_2$ für ein $\sigma \in G$. Folgern Sie, dass $\mathfrak{P}_1$ in $\bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{P}_2)$ enthalten ist und hieraus dann die Behauptung.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
In dieser Aufgabe wollen wir ein Beispiel einer ganzen Ringerweiterung studieren bei dem 'Going down' nicht gilt.

Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 2$, $S = K[x, y]$ der Polynomring in zwei Variablen und

$$R := K[a, b, y] \subset S \text{ mit } a = x^2 - 1 \text{ und } b = xa.$$

a) Zeigen Sie, dass S die Normalisierung von R ist.

b) Zeigen Sie, dass
$$P := (a - (y^2 - 1), b - y(y^2 - 1)) \subset R$$
ein Primideal ist, welches im Primideal
$$Q' := (x - 1, y + 1)$$
von S enthalten ist.

c) Zeigen Sie: Das eindeutige Ideal Q von S mit $R \cap Q = P$ ist
$$Q := (x - y) \subset S.$$
Folgern Sie, dass 'Going down' für die Inklusion $R \hookrightarrow S$ nicht gilt.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Montag, 1. Juli 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.