Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
28. Juni 2019

Höhere Algebra - Tutorium 9

Aufgabe 1
Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung, A ein Hauptidealring und B ein Integritätsbereich. Zeigen Sie: Jedes Primideal $\mathfrak{P} \subseteq B$, $\mathfrak{P} \neq (0)$ ist maximal.

Aufgabe 2
Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathcal{J}_A$ bzw. $\mathcal{J}_B$ das Jacobsonradikal von A bzw. B. Zeigen Sie: $\mathcal{J}_A = \mathcal{J}_B \cap A$.

Aufgabe 3
Sei K ein quadratischer Zahlkörper, d.h. eine Körpererweiterung von Grad 2 über $\mathbb{Q}$.
Zeigen Sie: Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ ist noethersch, ganz abgeschlossen und jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist ein maximales Ideal.
Einen noetherschen, ganz abgeschlossenen Integritätsbereich in dem jedes Primideal ungleich dem Nullideal ein maximales Ideal ist, nennt man ***Dedekindbereich****.*

Aufgabe 4
Sei K ein Körper. Eine **(diskrete) Bewertung** auf K mit Werten in $\mathbb{Z}$ ist eine Abbildung

$$v : K^\times \to \mathbb{Z},$$

so dass

i) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
ii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$

für alle $x, y \in K^\times$. Außerdem setzen wir $v(0) = +\infty$.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Fortsetzung auf die Null sinnvoll gewählt ist.
b) Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ ein Integritätsbereich ist, so dass für $x \neq 0 \in K$ gilt $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$.
Dieser Ring wird ***Bewertungsring von*** *v genannt.*
c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ das einzige maximale Ideal in A ist.
d) Sei nun $K = \mathbb{Q}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Q}^\times &\to \mathbb{Z} \\ x = p^n y &\mapsto n \end{aligned}$$

mit $y \in \mathbb{Q}$ mit Zähler und Nenner prim zu p und $n \in \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung ist.
Wie sieht der Bewertungsring zu v_p aus?
e) Zeigen Sie, dass A ein noetherscher Ring ist.