



Höhere Algebra - Tutorium 8

Ganzheit

Aufgabe 1

Beantworten Sie folgende Fragen (mit Begründung):

- a) Ist $\mathbb{Q}$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$?
- b) Was ist der normale Abschluss von $\mathbb{Z}$?
- c) Ist $\mathbb{Z}$ ganz abgeschlossen über $\mathbb{C}$?
- d) Ist $k[x, y, z]$ ganz abgeschlossen?

Aufgabe 2

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ genau aus den Elementen von $\mathbb{Q}(i)$ besteht, welche eine normierte Gleichung der Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

- b) Beantworten Sie folgende Fragen:
 - i) Ist $\mathbb{Z}[i]$ normal?
 - ii) Was ist der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(i)$?
 - iii) Ist $\mathbb{Q}(i)$ eine ganze Ringerweiterung von $\mathbb{Z}[i]$?

Aufgabe 3

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ und $K = \text{Quot}(R)$.

- a) Zeigen Sie, dass $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
- b) Folgern Sie, dass R nicht normal ist.
- c) Zeigen Sie, dass $S = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist.
- d) Zeigen Sie, dass S im normalen Abschluss von R liegt.

Aufgabe 4

Sei A ein Integritätsbereich und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von A . Sei

$$A^G = \{a \in A \mid \sigma(a) = a \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

der Ring der G -Invarianten.

Zeigen Sie: A ist ganz über A^G .

Aufgabe 5

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei. Auf dem Übungsblatt bestimmen wir den Ganzheitsring $\mathcal{O}_{K, \mathbb{Z}}$ explizit. Sei $U = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ und p eine Primzahl. Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}_{(p)} = U^{-1}\mathbb{Z}$ in K für alle p und d .