LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
Freitag, 14. Juni 2019

# Höhere Algebra - Tutorium 7

Primärzerlegungen

**Aufgabe 1**
Sei $I = \sqrt{I}$ ein Radikalideal. Bestimmen Sie eine minimale Primäridealzerlegung von $I$.

**Aufgabe 2**
Sei $R = k[x, y]$ und $I = (x^2, xy)$. Aus der Vorlesung sind die Zerlegungen

$$I = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x, y)^2$$

bekannt. Seien $U_1 = R \setminus (x, y)$, $U_2 = R \setminus (x)$ und $U_3 = R \setminus (y)$. Bestimmen Sie die Primäridealzerlegungen von $U_i^{-1} I$.

**Aufgabe 3**
Sei $R$ nullteilerfrei. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(0) \in \mathrm{Ass}_R(M)$.

(ii) Es existiert eine Einbettung $\varphi : R \hookrightarrow M$.

**Aufgabe 4**
Sei $R$ ein Hauptidealring und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass $(0) \in \mathrm{Ass}_R(M)$ genau dann, wenn $rk_R(M) > 0$.

(ii) Sei $M$ ein Torsionsmodul, d.h. $M \cong \bigoplus_{i \in I} R/P_i^{e_i}$ für endlich viele Primideale $P_i$. Bestimmen Sie $\mathrm{Ass}_R(M)$.

(iii) Sei nun $M$ ein beliebiger, endlich erzeugter $R$-Modul. Bestimmen Sie $\mathrm{Ass}_R(M)$.

**Aufgabe 5**
Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Bestimmen Sie die Primäridealzerlegungen von $2R$, $3R$ und $7R$.

*Hinweis*: Zeigen Sie zuerst, dass in $R$ jedes nicht-triviale Primideal maximal ist. In $R$ gilt $7 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$.