LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2016
30. Mai 2019

Höhere Algebra - Tutorium 5

Artinsche und noethersche Moduln

Alle Ringe auf diesem Tutoriumsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1

a) Entscheiden Sie in den folgenden Fällen ob die aufsteigende bzw. absteigende Kettenbedingung erfüllt ist und begründen die Entscheidung:

   i) Eine endliche abelsche Gruppe (als $\mathbb{Z}$-Modul).

   ii) Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Modul).

   iii) Sei p ein fixierte Primzahl. Die Untergruppe G von $\mathbb{Q}\ /\ \mathbb{Z}$ die aus allen Elementen besteht, deren Ordnung eine Potenz von p ist (als $\mathbb{Z}$-Modul).

   iv) Der Polynomring $k[x_1, x_2, \ldots]$ in unendlich vielen Unbestimmten, wobei k ein Körper ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder Unterring eines noetherschen Rings ist wieder noethersch.

Aufgabe 2

Sei A ein artinscher Ring. Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, dann ist $A/\mathfrak{a}$ artinscher Ring.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\operatorname{Ann}(M)$ der Annulator von M.
Zeigen Sie: Ist M noethersch, so ist $A/\operatorname{Ann}(M)$ ein noetherscher Ring.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $u : M \to M$ ein Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie: Ist M artinsch und u injektiv, so ist u auch surjektiv.

Aufgabe 5

[1] Einen topologischen Raum X nennt man *noethersch* wenn jede offene Teilmenge von X die aufsteigende Kettenbedinung erfüllt. Da abgeschlossene Teilmengen Komplemente offener Teilmenge sind, ist es gleichwertig zu sagen, dass X die absteigende Kettenbedingung erfüllt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn X noethersch ist, dann ist jeder Unterraum von X noethersch.

b) Wenn A ein noetherscher Ring ist, dann ist $\operatorname{Spec}(A)$ ein noetherscher topologischer Raum.

[1] Diese Aufgabe ist nur als Ausblick auf später folgende Anwendungen gedacht. Spätestens in der Algebraischen Geometrie werden Sie solche und ähnliche Fragestellungen aber wieder vorfinden.