Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
24. Mai 2019

# Höhere Algebra - Tutorium 4

*Alle Ringe auf diesem Tutoriumsblatt sind kommutativ.*

**Aufgabe 1**
Sei $A$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K$ und $M$ ein $A$-Modul. Ein Element $m \in M$ heißt *Torsionselement*, falls ein $a \in A \setminus \{0\}$ mit $am = 0$ existiert. Sei $T(M)$ die Menge der Torsionselemente in $M$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $T(M)$ ist ein Untermodul von $M$. Also nennen wir $T(M)$ von nun an *Torsionsmodul*.

b) $M/T(M)$ ist torsionfrei, d.h. $T(M/T(M)) = \{0\}$.

c) Ist $f : M \to N$ ein $A$-Modulhomomorphismus, so ist $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

d) Ist $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $A$-Moduln, so ist auch die Sequenz $0 \to T(M') \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(M'')$ exakt (d.h. $T(\_\_)$ ist linksexakt).

e) $T(M)$ ist der Kern der Abbildung $i : M \to K \otimes M$, $m \mapsto 1 \otimes m$.

**Aufgabe 2**
Sei $A$ ein Ring und $M$ ein $A$-Modul.

a) Sei $M$ flach. Zeigen Sie: Für jeden Nichtnullteiler $a \in A$ und jedes $m \in M$ mit $am = 0$, folgt $m = 0$.

b) Sei nun $A$ ein Integritätsbereich. Wenn $M$ flach ist, dann ist $M$ auch torsionsfrei.

*Hinweis: Die Rückrichtung für Teilaufgabe b) ist im Allgemeinen zwar nicht richtig, kann aber unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. A Hauptidealring) gezeigt werden.*

**Aufgabe 3**

Sei $A$ ein Ring und $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $A$-Moduln. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gleichwertig sind:

a) Es gibt eine $A$-lineare Abbildung $h : M'' \to M$, sodass $gh = \mathrm{id}_{M''}$.

b) Es gibt eine $A$-lineare Abbildung $k : M \to M'$, sodass $kf = \mathrm{id}_{M'}$.

c) Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : M \to M' \oplus M''$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M'}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota_1"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\pi_2"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutiert und die letzte Zeile exakt ist. Es ist $\iota_1(x) = (x, 0)$ und $\pi_2(x, y) = y$.

*Eine exakte Sequenz mit den Eigenschaften a)–c) heißt* zerfallend.

**Aufgabe 4**

a) Zeigen Sie, dass für einen $A$-Modul $P$ folgende Aussagen äquivalent sind:

   i) Seien $M, N$ $A$-Moduln und seien $g : M \to N$ und $f : P \to N$ $A$-lineare Abbildungen, wobei $g$ surjektiv ist. Dann gibt es eine $A$-lineare Abbildung $h : P \to M$, sodass $gh = f$ ist.

   ii) Jede kurze exakte Sequenz von $A$-Moduln $0 \to M' \to M \to P \to 0$ zerfällt.

   iii) Es gibt einen freien $A$-Modul $F$ sowie einen $A$-Modul $K$, sodass $F \cong P \oplus K$ gilt.

   *Ein $A$-Modul $P$ mit den Eigenschaften i)–iii) heißt* projektiv.

b) Finden Sie unendlich viele verschiedene Beispiele von nicht-projektiven $\mathbb{Z}$-Moduln.