LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
16. Mai 2019

Höhere Algebra - Tutorium 3

Kapitel exakte Sequenzen und Tensorprodukt

Alle Ringe auf diesem Tutoriumsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1
Seien M', M, M'' R-Moduln, die eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$$

bilden. Ist N ein beliebiger R-Modul, so ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

wobei

$$u_* : \mathrm{Hom}_R(N, M') \to \mathrm{Hom}_R(N, M), g \mapsto u \circ g.$$

und v_* analog definiert.

Aufgabe 2
Zeigen sie folgende Aussage, die man oft als *5-Lemma* bezeichnet:
Für ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{u_1} & M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 & \xrightarrow{u_4} & M_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ N_1 & \xrightarrow{v_1} & N_2 & \xrightarrow{v_2} & N_3 & \xrightarrow{v_3} & N_4 & \xrightarrow{v_4} & N_5 \end{array}$$

von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen gilt:

a) f_1 surjektiv, f_2, f_4 injektiv $\Rightarrow$ f_3 injektiv,

b) f_5 injektiv, f_2, f_4 surjektiv $\Rightarrow$ f_3 surjektiv.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ durch Nachweis der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.