



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
8. Mai 2019

Höhere Algebra - Tutorium 2

Kapitel Modultheorie und Lokalisierungen

Alle Ringe auf diesem Tutoriumsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1

Sei $A \neq 0$ ein Ring.

- a) Zeigen Sie: Jede Nichteinheit $x \in A \setminus A^\times$ liegt in einem maximalen Ideal.
- b) Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - i) A ist ein lokaler Ring,
 - ii) Alle Nichteinheiten von A liegen in einem Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq A$,
 - iii) Die Nichteinheiten in A bilden ein Ideal.

Aufgabe 2

Seien M, M', N A -Moduln und $u \in \text{Hom}_A(M, M')$. Zeigen Sie:

- a) $u^* : \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), f \mapsto f \circ u$ ist A -linear.
- b) $u_* : \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M'), f \mapsto u \circ f$ ist A -linear.
- c) $\text{Hom}_A(A, M)$ und M sind als A -Moduln isomorph.

Aufgabe 3

Sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann heißt

$$\text{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \subseteq R \text{ Primideal} \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

der **Träger von M** . Die Menge

$$\text{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rM = 0\}$$

heißt der **Annulator von M** .

- a) Zeigen Sie: $\text{Ann}_R(M)$ ist ein Ideal in R .
- b) Zeigen Sie: $P \in \text{Supp}(M) \iff \text{Ann}_R(M) \subseteq P$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring.

- a) Sei M ein A -Modul. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft 'Null zu sein' lokal ist, i.e.,

$$M = 0 \Leftrightarrow M_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A),$$

wobei für uns hier $\operatorname{Spec}(A)$ die Menge aller Primideale von A bezeichnet.

- b) Sei A ein Ring, S eine multiplikative Menge in A und $\mathcal{N}$ das Nilradikal von A . Zeigen Sie, dass $S^{-1}\mathcal{N}$ das Nilradikal von $S^{-1}A$ ist.
- c) Folgern Sie: Ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert (d.h. das Nilradikal von $A_{\mathfrak{p}}$ ist trivial), so ist A reduziert.
- d) Sei für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ der lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ein Integritätsbereich. Ist dann auch A ein Integritätsbereich?