



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
11. Juli 2019

Höhere Algebra - Tutorium 11

Definition 1 Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$. Ein A -Untermodul $M \subseteq K$ ist ein **gebrochenes Ideal** von A , falls es ein $0 \neq x \in A$ gibt, sodass $xM \subseteq A$ gilt. Ist $M \subseteq K$ ein gebrochenes Ideal von A , so setze $(A : M) = \{x \in K \mid xM \subseteq A\}$ (A -Untermodul von K).

Aufgabe 1

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist ein gebrochenes Ideal.
Diese üblichen Ideale nennt man auch **ganze Ideale**.
- Sei $u \in K$ und $M = Au$. M ist ein gebrochenes Ideal.
Gebrochene Ideale dieser Form nennt man **gebrochene Hauptideale**.
- Jeder endlich erzeugte A -Untermodul M von K ist ein gebrochenes Ideal.
- Ist A noethersch, so ist jedes gebrochene Ideal M von A endlich erzeugt.

Definition 2 Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$. Ein A -Untermodul M von K ist **invertierbar**, falls es einen A -Untermodul N von K gibt, sodass gilt: $MN = A$.

Aufgabe 2

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Ist M invertierbar mit $MN = A$, so ist $N = (A : M)$, und damit eindeutig durch M bestimmt.
- Ist M invertierbar, so ist $M \subseteq K$ ein endlich erzeugter A -Modul und daher ein gebrochenes Ideal.
- Ist $M = Au$ das von einem $u \in K^\times$ erzeugte gebrochene Hauptideal, so ist M invertierbar.

Aufgabe 3

Sei $(0) \neq I$ ein Primideal im Dedekindbereich A (mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$) und sei $J := (A : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq A\}$. Dann gilt $A \subsetneq J$.

Aufgabe 4

Sei $(0) \neq I$ ein Primideal im Dedekindbereich A (mit Quotientenkörper $K = \text{Quot}(A)$) und sei $J := (A : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq A\}$. Dann ist J ein gebrochenes Ideal und $IJ = A$.