



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
Freitag, 5. Juli 2019

Höhere Algebra - Tutorium 10

Aufgabe 1

- a) Zeigen Sie, dass in einem noetherschen Ring A , jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eine Potenz ihres Radikals enthält. Insbesondere, ist in einem noetherschen Ring das Nilradikal nilpotent.
- b) Zeigen Sie, dass in einem artinschen Ring B das Nilradikal $\mathcal{N}$ nilpotent ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Dimension von folgenden Ringen:

- a) k (Körper);
- b) $\mathbb{Z}$;
- c) Hauptidealring A , welcher kein Körper ist,
- d) Polynomring $B = k[x_1, x_2, \dots]$ über einem Körper k in unendlich vielen Variablen.

Aufgabe 3

- a) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschiedene Primideale in B sind mit $\mathfrak{P}_1 \cap A = \mathfrak{P}_2 \cap A$, dann gilt $\mathfrak{P}_1 \not\subseteq \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_2 \not\subseteq \mathfrak{P}_1$.
- b) Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Zeigen Sie, dass $\dim(A) = \dim(B)$ gilt.

Aufgabe 4

- a) Sei A ein Ring in dem das Nullideal (0) das Produkt $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ von (nicht unbedingt verschiedenen) maximalen Idealen ist. Zeigen Sie: A ist noethersch genau dann, wenn A artinsch ist.
- b) Zeigen Sie: Ein Ring A ist artinsch genau dann, wenn A noethersch und $\dim(A) = 0$.