LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
2. Mai 2019

Höhere Algebra - Tutorium 1

Kapitel Hilberts Basissatz & Nullstellensatz

Aufgabe 1
Sei A ein noetherscher Ring und $f : A \to A$ ein Ringhomomorphismus.
Zeigen Sie: Ist f surjektiv, so ist f auch injektiv.

Aufgabe 2
Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \subseteq A$ Ideale. Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$
b) $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = A$
c) $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$
d) $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{a}'}$

Aufgabe 3
Sei $A \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie:

a) Der Ring A besitzt maximale Ideale.
b) Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A$ liegt in einem maximalen Ideal.

Aufgabe 4
Sei A ein Ring. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}_A$ das Nilradikal von A:

$$\mathcal{N}_A = \{r \in A | \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}_A$ in jedem Primideal von A enthalten ist.
b) Sei $r \in A$ ein Element mit $r^n \neq 0$ für $n \geq 1$ und definieren Sie eine Menge S von Idealen in A durch
$$I \in S :\Leftrightarrow \{r^n | n \geq 1\} \cap I = \emptyset$$
Zeigen Sie, dass S ein maximales Element P enthält und dass P ein Primideal ist.
c) Folgern Sie, dass gilt:
$$\mathcal{N}_A = \bigcap \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subset A \ , \mathfrak{p} \ \text{ Primideal}\}.$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie: Für jedes Ideal in einem Ring A gilt:

$$\bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{I},$$

wobei der Schnitt über alle Primideale von A geht, die I enthalten.

Aufgabe 6
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge des $\mathbb{A}_k^2$ die affine algebraische Menge zu einer Teilmenge $I \subseteq k[x, y]$ ist:

$$M := \{(t^2, t^3) \mid t \in k\}.$$