Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
26. Juli 2019

Höhere Algebra

Hauptklausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Bachelor ❍ Master

❍ Anderes: ____________________

Studiengang: ❍ Mathematik ❍ Wirtschaftsm. ❍ ____________________

Prüfungsordnung: ____________________

Anrechnung der Credit Points für das

❍ Hauptfach

❍ Nebenfach, und zwar ____________________

❏ Ich stimme zu, dass mein Klausurergebnis in UniWorX eingetragen und an die dort angegebene E-Mail-Adresse verschickt wird.

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Versehen Sie auch zusätzliche Blätter mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer. Vermerken Sie deutlich, wenn Ihre Lösung auf weiteren Blättern fortgesetzt wird.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **120 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	Summe
/8	/7	/6	/8	/10	/39

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (3+2+3 Punkte)

a) Sei L ein Körper und $R \subseteq L$ ein Teilring. Jedes Element von L sei ganz über R. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

b) Entscheiden Sie, ob man in Teilaufgabe a) auf die Ganzheitsbedingung verzichten kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei p eine Primzahl und L der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$. Sei $R \subseteq L$ ein Teilring. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Teilaufgabe a) ist ein Resultat der Vorlesung. Es ist hier nochmals ein Beweis anzugeben.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (3+4 Punkte)
Sei $A = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ und wir betrachten in diesem Ring die Ideale $I = 3A$, $\mathfrak{p}_1 = (3, 1 + \sqrt{7})$ und $\mathfrak{p}_2 = (3, 1 - \sqrt{7})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ maximale Ideale sind.
Hinweis: Betrachten Sie den kanonischen Homomorphismus $\pi_i : \mathbb{Z} \to A/\mathfrak{p}_i$ *mit* $i \in \{1, 2\}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = 3A$ gilt und begründen Sie, dass dadurch die eindeutige minimale Primäridealzerlegung gegeben ist.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (3+3 Punkte)
Sei $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines Rings A. Zeigen Sie:

a) Ist M ein endlich erzeugter A-Modul mit der Eigenschaft $S^{-1}M = 0$, so gibt es ein $s \in S$ mit $sM = 0$.

b) Ist der Ring A noethersch, so auch der Ring $S^{-1}A$.

Beide Teilaufgaben sind Resultate aus der Vorlesung. Es ist hier nochmals ein Beweis anzugeben.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (5+3 Punkte) Sei R ein noetherscher Ring und M ein R-Modul.

a) Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Zeigen Sie:

$$M \text{ ist noethersch } \Leftrightarrow M' \text{ und } M/M' \text{ sind noethersch.}$$

b) Sei nun M noethersch und $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq M$.
Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > m$ gilt:

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} a_{n,i} f_i \text{ mit } a_{n,i} \in R.$$

Teilaufgabe a) ist ein Resultat der Vorlesung. Es ist hier nochmals ein Beweis anzugeben.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (jeweils 2 Punkte)
Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Sei A ein artinscher Ring und $f : A \to A$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann ist f auch surjektiv.

b) $\mathbb{Q}$ ist ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul.

c) Betrachten Sie die Menge aller reellen Folgen $F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ als $\mathbb{R}$-Modul. Dann ist F noethersch.

d) Sei K ein Körper und
$$0 \longrightarrow (V'_n) \longrightarrow (V_n) \longrightarrow (V''_n) \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von projektiven Systemen von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Dann ist
$$0 \longrightarrow \varprojlim_n V'_n \longrightarrow \varprojlim_n V_n \longrightarrow \varprojlim_n V''_n \longrightarrow 0$$
exakt.

e) Betrachten Sie $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Dann gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Wenn Sie in Teilaufgabe a) Resultate des Übungsbetriebs benutzen, müssen diese nochmals bewiesen werden.