LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
4. Januar 2019

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Wir verwenden das aus den Tutorien und der Vorlesung bekannte Verfahren und erhalten zum Beispiel als Lösung $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \in \mathbb{F}_2[x]$.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

i) $\Rightarrow$ ii) Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, außerdem setzen wir $I := R \setminus R^\times$. Seien nun $a, b \in I$, also sind (a) und (b) echte Ideale in R. Da es in R nur ein maximales Ideal gibt, nämlich $\mathfrak{m}$, folgt $(a) \subseteq \mathfrak{m}$ und $(b) \subseteq \mathfrak{m}$. Also gilt auch $a - b \in \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ ein echtes Ideal ist, ist $a - b$ keine Einheit, also gilt $a - b \in I$. Für ein beliebiges $r \in R$, gilt $ra \in \mathfrak{m}$. Wiederum ist ra keine Einheit da $\mathfrak{m}$ ein echtes Ideal ist, also gilt auch $ra \in I$. Somit ist die Menge $I = R \setminus R^\times$ ein Ideal.

ii) $\Rightarrow$ i) Wir nehmen an $I := R \setminus R^\times$ ist ein Ideal und wollen zeigen, dass dann R ein lokaler Ring ist. Da $1 \in R$ eine Einheit ist, ist I ein echtes Ideal. Sei nun $\mathfrak{m}$ ein beliebiges maximales Ideal von R. Dann ist jedes Element von $\mathfrak{m}$ eine Nicht-Einheit von R da $\mathfrak{m}$ ein echtes Ideal ist, also gilt $\mathfrak{m} \subset I$. Da $\mathfrak{m}$ aber maximal ist gilt $\mathfrak{m} = I$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sei wieder $I := R \setminus R^\times$, die Behauptung $I = R$ führt wegen $1 \in R$ aber sofort zu einem Widerspruch.

iii) $\Rightarrow$ ii) Hier können wir wieder den gleichen Beweis wie bei i) $\Rightarrow$ ii) benutzen, da die Eigenschaften, die wir benutzt haben und die aus der Existenz eines einzigen maximalen Ideals folgen hier explizit als Voraussetzung gegeben sind.

Aufgabe 3 (9 Punkte).

a) Man rechnet schnell nach, dass $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist. Die Einheiten sind natürlich genau diejenigen Elemente $0 \neq \frac{a}{b}$, für die auch der Zähler a nicht in (p) liegt. Denn dann ist $\frac{b}{a}$ das Inverse. Ist $0 \neq \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ mit $a \in (p)$, so liegt das Inverse $\frac{b}{a}$ nicht in $\mathbb{Z}_{(p)}$ (ein anderes Inverses kann es nicht geben, weil die Inversen eindeutig sind und wir das Inverse von $\frac{a}{b}$ in $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}_{(p)}$ kennen.). Die Menge der Nichteinheiten $\{\frac{a}{b} \mid a \in (p),\ b \notin (p)\}$ bildet ein Ideal in $\mathbb{Z}_{(p)}$ (leichtes Nachrechnen), was mit Aufgabe 2 heißt, dass $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein lokaler Ring ist mit maximalem Ideal $p\,\mathbb{Z}_{(p)}$.

b) und c) Sei R ein lokaler Ring, also im Fall von $R = K$ haben wir das maximale Ideal (0) und im Fall von $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ haben wir in Teilaufgabe a) gezeigt, dass das maximale Ideal $p\,\mathbb{Z}_{(p)}$ ist.

Sei nun $f \in R[\![T]\!]$, dann ist f genau dann invertierbar, wenn $f(0)$ eine Einheit ist. Das haben wir auf Blatt 7 in Aufgabe 4 für einen allgemeineren Ring gezeigt. Nun ist aber für einen lokalen Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, offensichtlich $(\mathfrak{m}, T) \subset R[\![T]\!]$ die

Menge der Nicht-Einheiten. Mit Aufgabe 2 wissen wir somit, dass $R[\![T]\!]$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $(\mathfrak{m}, T)$ ist. Auf unsere beiden Teilaufgaben angewendet ergibt das nun die lokalen Ringe $K[\![T]\!]$ bzw. $\mathbb{Z}_{(p)}[\![T]\!]$ mit maximalen Idealen $TK[\![T]\!]$ bzw. (p, T).

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Zu i) $\Rightarrow$ ii): Wir benutzen Kontraposition und wählen uns ein nicht endlich erzeugtes $\mathfrak{a} \subseteq R$. Im ersten Schritt wählen wir uns ein $a_1 \in \mathfrak{a}$ und setzen $\mathfrak{a}_1 = (a_1)$. Im zweiten Schritt seien $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{a}_{n-1}$ schon konstruiert. Da $\mathfrak{a}$ aber nicht endlich erzeugt ist, gibt es ein $a_n \in \mathfrak{a}$ mit $a_n \notin \mathfrak{a}_i$ für $i < n$. Setze dann $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n-1} + (a_n)$ usw. Dies liefert eine unendliche aufsteigende Kette von Idealen in R, die nicht stationär wird.

Zu ii)$\Rightarrow$iii): Sei $\mathfrak{a}_1$ ein Ideal. Wenn es nicht maximal ist, ist es in einem anderen Ideal $\mathfrak{a}_2$ enthalten. Ist dies wiederum nicht maximal, so ist es in einem Ideal $\mathfrak{a}_3$ enthalten. Induktiv konstruieren wir also eine Kette $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$. Diese Kette wird stationär, etwa bei $\mathfrak{a}_N$. Nun ist $\mathfrak{a}_N$ maximal, denn für ein Ideal $\mathfrak{a}_{N+1} \supseteq \mathfrak{a}_N$ gilt $\mathfrak{a}_{N+1} = \mathfrak{a}_N$.

Zu iii)$\Rightarrow$i): Sei $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Idealkette in R. Dann ist die Menge $\{\mathfrak{a}_i\}$ nicht leer und hat daher ein maximales Element $\mathfrak{a}_N$. Daher wird die Kette an der Stelle $\mathfrak{a}_N$ stationär.