Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
29. Dezember 2018

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (10 Punkte).
Sei $n := |G|$. Wir werden der Reihe nach für $n = 2, 3, \ldots, 59$ zeigen, dass G auflösbar ist. Dazu geben wir entweder einen direkten Beweis für die Auflösbarkeit an, oder wir zeigen, dass G einen nicht-trivialen Normalteiler N besitzt. Dann ist G auflösbar, da N und G/N auflösbar sind.

Wir benutzen die folgenden Resultate:

(F1) p-Gruppen sind auflösbar.

(F2) Gruppen der Ordnung pq mit $p \neq q$ sind auflösbar.

- $n = 2, 3, 4, 5$: F1
- $n = 6$: F2
- $n = 7, 8, 9$: F1
- $n = 10$: F2
- $n = 11$: F1
- $n = 12$: Hier gilt $n_3 \in \{1, 4\}$. Falls $n_3 = 1$, so ist die 3-Sylowgruppe normal. Falls es 4 3-Sylowgruppen gibt, so gibt es in G $4 \cdot 2 = 8$ Elemente der Ordnung 3. Grund: Da die 3-Sylowgruppen zyklisch sind, schneiden sich zwei verschiedene 3-Sylowgruppen trivial. Es verbleiben also noch vier Elemente. Diese formen die 2-Sylowgruppe, welche dann normal ist.
- $n = 13$: F1
- $n = 14, 15$: F2
- $n = 16, 17$: F1
- $n = 18$: Hier gibt es genau eine 3-Sylowgruppe.
- $n = 19$: F1
- $n = 20$: Hier gibt es genau eine 5-Sylowgruppe.
- $n = 21, 22$: F2
- $n = 23$: F1
- $n = 24$: Es gilt $n_2 \in \{1, 3\}$. Falls es 3 2-Sylowgruppen gibt, so lassen wir G auf der Menge der 3-Sylowgruppen durch Konjugation wirken und erhalten einen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi \colon G \longrightarrow S_3.$$
Aus Ordnungsgründen ist der Kern von φ nicht-trivial.
- $n = 25, 26, 27$: F1 oder F2
- $n = 28$: Hier gibt es genau eine 7-Sylowgruppe.
- $n = 29$: F1

- **$n = 30$:** Es gilt: $n_3 \in \{1, 10\}, n_5 \in \{1, 6\}$. Angenommen $n_3 = 10$ und $n_5 = 6$. Dann gibt es $10 \cdot 2 = 20$ Elemente der Ordnung 3 und $6 \cdot 4 = 24$ Elemente der Ordnung 5. Widerspruch.
- **$n = 31, 32, 33, 34, 35$:** F1 oder F2
- **$n = 36$:** Es gilt: $n_3 \in \{1, 4\}$. Falls es 4 3-Sylowgruppen gibt, so lassen wir G auf der Menge der 3-Sylowgruppen durch Konjugation wirken und erhalten einen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi \colon G \longrightarrow S_4.$$
Aus Ordnungsgründen ist der Kern von φ nicht-trivial.
- **$n = 37, 38, 39$:** F1 oder F2
- **$n = 40$:** Hier gibt es genau eine 5-Sylowgruppe.
- **$n = 41$:** F1
- **$n = 42$:** Hier gibt es genau eine 7-Sylowgruppe.
- **$n = 43$:** F1
- **$n = 44$:** Hier gibt es genau eine 11-Sylowgruppe.
- **$n = 45$:** Hier gibt es genau eine 5-Sylowgruppe.
- **$n = 46, 47$:** F1 oder F2
- **$n = 48$:** Es gilt: $n_2 \in \{1, 3\}$. Falls es drei 2-Sylowgruppen gibt, so lassen wir G auf der Menge der 2-Sylowgruppen durch Konjugation wirken und erhalten einen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi \colon G \longrightarrow S_3.$$
Aus Ordnungsgründen ist der Kern von φ nicht-trivial.
- **$n = 49$:** F1
- **$n = 50$:** Hier gibt es genau eine 5-Sylowgruppe.
- **$n = 51$:** F2
- **$n = 52$:** Hier gibt es genau eine 13-Sylowgruppe.
- **$n = 53$:** F1
- **$n = 54$:** Hier gibt es genau eine 3-Sylowgruppe.
- **$n = 55$:** F2
- **$n = 56$:** Hier gilt $n_7 \in \{1, 8\}$. Falls $n_7 = 1$, so ist die 7-Sylowgruppe normal. Falls es 8 7-Sylowgruppen gibt, so gibt es in G $8 \cdot 6 = 48$ Elemente der Ordnung 7. Grund: Da die 7-Sylowgruppen zyklisch sind, schneiden sich zwei verschiedene 7-Sylowgruppen trivial. Es verbleiben also noch acht Elemente. Diese formen die 2-Sylowgruppe, welche dann normal ist.
- **$n = 57, 58, 59$:** F1 oder F2.

Aufgabe 2 (7 Punkte).
Sei G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8. Dann besitzt G kein Element der Ordnung 8. Daher gibt es in G ein Element a der Ordnung 4. Sonst hätte nämlich jedes nicht-triviale Element die Ordnung 2 und G wäre damit abelsch. Sei $b \in G \setminus \langle a \rangle$. Die Untergruppe $\langle a \rangle$ ist ein Normalteiler (Index 2!). Wegen $[G : \langle a \rangle] = 2$ folgt $b^2 \in \langle a \rangle$. Es gilt also $b^2 = a^k$ mit $k = 0, 1, 2, 3$. Die Fälle $k = 1, 3$ scheiden aus, da sonst $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^3) \leq 2$ folgen würde.
Da $\langle a \rangle \lhd G$ gilt $bab^{-1} = a^l$ mit $l \in \{1, 3\}$. Der Fall $l = 1$ scheidet aus, da sonst G abelsch wäre.

Fall $k = 0$: Hier ist $G = \langle a, b \mid ord(a) = 4, ord(b) = 2, ba = a^3 b \rangle \simeq D_4$
Fall $k = 2$: Hier ist $G = \langle a, b \mid ord(a) = 4, a^2 = b^2, ba = a^3 b \rangle \simeq Q_8$

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Falls $\varphi(h) = id_G$ für alle $h \in H$, so gilt für alle $g, g_1 \in G, h, h_1 \in H$

$$\begin{aligned}(g,h)(g_1,h_1) &= (g\varphi(h)(g_1), hh_1) = (gg_1, hh_1),\\ (g_1,h_1)(g,h) &= (g_1\varphi(h_1)(g), hh_1) = (gg_1, hh_1).\end{aligned}$$

Also ist $G \times_\varphi H$ abelsch.
Falls es andernfalls ein $h \in H$ gibt mit $\varphi(h) \neq id_G$, so gibt es ein $g \in G$ mit $\varphi(h)(g) = g_1, g \neq g_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(g,h)(1,h) &= (g\varphi(h)(1), h^2) = (g, h^2),\\ (1,h)(g,h) &= (\varphi(h)(g), h^2) = (g_1, h^2).\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Gruppe $G \times_\varphi H$ also nicht abelsch.

Aufgabe 4 (8 Punkte).

a) Sei $p \neq 2$. Wir wollen zeigen, dass $1 + p$ die Ordnung p in $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$ hat. Mit der Binomischen Formel erhalten wir:

$$(1+p)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^3 + \dots,$$

wenn wir nun modulo p^2 reduzieren erhalten wir, dass die Ordnung von $1 + p$ die Primzahl p teilen muss. Da $1 + p$ aber nicht das neutrale Element ist folgt, dass das Element $1 + p$ die Ordnung p hat in $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$.

b) i) Sei $G = C_{p^2} = \langle a \rangle$ und $H = C_p = \langle b \rangle$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$$

welche definiert ist durch $\varphi(b)(a) = a^{p+1}$, das heißt dem Erzeuger b von H wird der Automorphismus $a \mapsto a^{1+p}$ zugeordnet. Wir wissen zudem, dass $\mathrm{Aut}(C_{p^2}) \cong \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$ gilt und dass $(p + 1, p^2) = 1$. Eventuell ist es einfacher die isomorphen Gruppen zu identifizieren und sich φ vorzustellen als

$$\begin{aligned}\varphi : H &\to \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times\\ b &\mapsto p+1\end{aligned}$$

mit der Binomischen Formel erhalten wir $\varphi(b^n) = 1 + np$ in $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$ und der zugehörige Automorphismus in $\mathrm{Aut}(C_{p^2})$ ist $a \mapsto a^{1+np}$. Insbesondere ist also $\varphi(b^p) = 1$. Die Operation ist für zwei beliebige Elemente in $G \times_\varphi H$ ist nun definiert als:

$$(a^{n_1}, b^{m_1}) \cdot (a^{n_2}, b^{m_2}) = (a^{n_1}\varphi(b^{m_1})(a^{n_2}), b^{m_1+m_2}) = (a^{n_1+n_2(1+m_1 p)}, b^{m_1+m_2})$$

ii) Nach der vorigen Aufgabe ist die Gruppe nicht-abelsch, da $\varphi(b)$ dem Automorphismus $a \mapsto a^{p+1}$ entspricht und dieser nicht die Identität ist. Außerdem haben wir per Konstruktion, dass $G \times_\varphi H$ eine Gruppe der Ordnung p^3 ist.

iii) Nun wollen wir das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen der Gruppe bestimmen. Da $|G \times_\varphi H| = p^3$ und die Gruppe nicht-abelsch ist, kommen nur p^2 und p in Frage, aber das Element $(a, 1)$ hat offensichtlich Ordnung p^2, also ist der kgV der Elementordnungen p^2.

c) Wir haben bereits eingesehen, dass $\operatorname{ord}((a, 1)) = p^2$. Ebenso lässt sich schnell einsehen, dass $\operatorname{ord}((1, b)) = p$. Außerdem gilt $(1, b) \cdot (a, 1) = (\varphi(b)(a), b) = (a^{p+1}, b) = (a^{p+1}, 1) \cdot (1, b) = (a, 1)^{p+1} \cdot (1, b)$, was auch die angegebenen Relationen zeigt. Diese Relationen beschreiben die Struktur der Gruppe vollständig, da wir damit die gesamte Gruppentafel ausfüllen können d.h. die Relationen zwischen allen Elementen der Gruppe kennen.