LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
10. Dezember 2018

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Sei $U \leq G$ und $[G : U] = p$ der kleinste Primteiler von $|G|$. Wir wollen zeigen, dass $U \triangleleft G$. Wir wissen bereits, dass gilt $U \subseteq N_G(U) \subseteq G$ und da $[G : U] = p$ ist können nur die Fälle: $N_G(U) = G$ oder $N_G(U) = U$ eintreten, wobei wir im ersten Fall sofort fertig sind.

Also gelte $N_G(U) = U$. Sei $\sigma \in G \setminus U$. Dann folgt, dass $G = \bigcup_{i=0}^{p-1} U\sigma^i$. Wegen unserer Voraussetzung $N_G(U) = U$ ist $\sigma \notin N_G(U)$.
Sei

$$M := \{g^{-1}Ug \mid g \in G\} = \{\sigma^{-i}U\sigma^i \mid 0 \leq i < p\}.$$

Wir betrachten nun die Wirkung von G auf M mittels Konjugation und erhalten einen Homomorphismus $\varphi : G \to S_p$. Es gilt $G \neq \ker(\varphi)$, da $\sigma \notin \ker(\varphi)$. Zudem gilt $\ker(\varphi) \subseteq U$, weil aus $g \in \ker(\varphi)$ folgt $g^{-1}Ug = U$ also $g \in N_G(U) = U$.
Wir nehmen jetzt an $U \neq \ker(\varphi)$. Dann gilt $\ker(\varphi) \subseteq U \subseteq G$ und somit $[U : \ker(\varphi)] = q \geq p$ da p der kleinste Primteiler von G ist. Dies ist aber ein Widerspruch, da gilt $|S_p| = p!$.

Aufgabe 2 (7 Punkte).
G habe die Ordnung $|G| = 750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Es gilt nach einem Sylowsatz, dass die Anzahl der 5-Sylowuntergruppen λ_5 folgende Kongruenz erfüllt: $\lambda_5 \equiv 1 \mod 5$ und außerdem gilt: $\lambda_5 | 6$. Damit bleiben nur die folgenden Möglichkeiten übrig: $\lambda_5 = 1, 6$. Diese Fälle müssen nun behandelt werden:

a) $\lambda_5 = 1$, d.h. es gibt nur eine 5-Sylowgruppe P und diese ist nach einem Sylowsatz zu sich selber konjugiert, d.h. $P \trianglelefteq G$ ist nichttrivialer Normalteiler.

b) $\lambda_5 = 6$, d.h. es gibt sechs 5-Sylowgruppen $P_1, \ldots P_6$. Nun betrachte man die Wirkung von G auf $X = \{P_1, \ldots, P_6\}$:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, P_i) & \mapsto & gP_ig^{-1} \end{array}$$

Sei $S(X)$ die Menge der Permutationen von X, also $S(X) \simeq S_6$. Damit erhalten wir folgenden Homomorphismus:

$$\begin{array}{rcl} \kappa : G & \to & S(X) \cong S_6 \\ g & \mapsto & (P_i \mapsto gP_ig^{-1} = P_j) \end{array}$$

Wir haben also einen Gruppen Homomorphismus $\kappa : G \to S_6$ und interessieren uns für den Kern. κ kann aus Ordnungsgründen ($|S_6| = 720$) nicht injektiv sein, daher besitzt κ einen nichttrivialen Kern. Würde weiter gelten $\ker \kappa = G$ so wäre die Aktion von der Form $gP_ig^{-1} = P_i$ für alle $g \in G$, d.h. es gäbe nur eine 5-Sylowgruppe. Daher gilt also: $1 \triangleleft \ker \kappa \triangleleft G$, da der Kern eines Gruppenhomomorphismus immer ein Normalteiler ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Wir wollen zeigen, dass es keine nicht-abelsche einfache Gruppe der Ordnung $|G| = p^m q$ gibt mit p Primzahl, $p \nmid q$ und $p^m \nmid (q-1)!$.

Zuerst wollen wir zeigen, dass jede p-Gruppe G mit $|G| > p$ nicht einfach ist. Mit Satz 1.6.4 der Vorlesung folgt, dass das Zentrum von G nicht trivial ist. Aber wenn $Z(G)$ ein echter Normalteiler von G ist, ist G nicht einfach. Gilt aber $Z(G) = G$, dann ist G abelsch und wir wissen in dem Fall bereits, dass dann $|G| = p$ gelten muss.

Wir nehmen nun an es existiert ein oben spezifiziertes G. Dann folgt mit einem Sylowsatz, dass es eine Untergruppe P gibt der Ordnung p^m, also vom Index q. Wir können annehmen, dass $q > 1$ gilt, da nicht-abelsche p-Gruppen nie einfach sind. Es existiert nun ein Homomorphismus $\varphi : G \to S_q$ mit $\ker(\varphi) \leq P$. Da G einfach ist, gibt es keine nicht-trivialen Normalteiler, also ist $\ker(\varphi) = \{e\}$ und φ somit eine injektive Abbildung, also $G = \cong \varphi(G) \leq S_q$. Mit dem Satz von Lagrange folgt nun $p^e q \mid q!$ und somit $p^m \mid (q-1)!$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

a) Wir beweisen diese Aussage mit Induktion über n. Der Induktionsstart $n = 1$ ist klar. Da es nur $n!$ Permutationen von n Objekten gibt, genügt es zu zeigen, dass es nur endlich viele n-Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ mit $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$ gibt, welche die Gleichung $q = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i_j}$ erfüllen. Für jedes n-Tupel gilt $i_1 \leq n/q$, da

$$q = 1/i_1 + \ldots + 1/i_n \leq 1/i_1 + \cdots + 1/i_1 = n/i_1.$$

Aber für jede positive Zahl $k \leq n/q$ bekommen wir mit der Induktionsvoraussetzung, dass es nur endlich fiele $n-1$-Tupel $(i_2, \dots, i_n)$ mit positiven ganzen Zahlen gibt für die gilt

$$q - (1/k) = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{i_j}$$

und wir haben somit die Behauptung gezeigt.

b) Wir nehmen nun an G ist eine endliche Gruppe mit genau n Konjugationsklassen. Wir setzen $|Z(G)| = m$ und erhalten mit der Klassengleichung

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{j=m+1}^{n} [G : C_G(x_j)].$$

Wenn wir nun $i_j := |G|$ setzen für $1 \leq j \leq m$ und $i_j := |G|/[G : C_G(x_j)] = |C_G(x_j)|$ für $m+1 \leq j \leq n$. Dann gilt $1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i_j}$. Mit Teilaufgabe a) gilt, dass es nur endlich viele solche n-Tupel gibt, also muss es einen maximalen Wert für alle möglichen i_j geben, den wir M nennen. Es folgt, dass eine endliche Gruppe G mit genau n Konjugationsklassen höchstens Ordnung M haben kann. Also kann es nur endlich viele nicht-isomorphe Gruppen mit dieser Eigenschaft geben.

Aufgabe 5 (5 Punkte).

Sei $\bar{P} \subseteq G/P$ eine p-Sylowgruppe. Wir zeigen, dass $\pi^{-1} : (\bar{P})$ eine p-Sylowgruppe von G enthält, wobei $\pi\, G \to G/N$.

Nach dem Korrespondenzsatz können wir $\pi^{-1}(\bar{P}) = H$ für eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $\bar{P} = {}^{H}\!/\!_{N}$ schreiben.
Sei nun $|G| = p^k m$ mit $p \nmid m$ und $|N| = p^l n$ mit $p \nmid l$, dann ist $|\bar{P}| = p^{k-l}$. Weiter gilt:

$$|H| = (H : N) \cdot |N| = |\bar{P}| \cdot |N| = p^k n.$$

Folglich ist eine p-Sylowgruppe von H auch eine p-Sylowgruppe von G. Sei $P \subseteq H$ eine solche p-Sylowgruppe. Da N Normalteiler ist, ist NP eine Untergruppe von H. Die Untergruppe $N \cap P \subseteq P$ ist eine p-Gruppe und hat deshalb Ordnung $\leq p^l$. Somit ist

$$|PN| = \frac{|P| \cdot |N|}{|P \cap N|} \geq \frac{p^k \cdot p^l n}{p^l} = p^k n = |H|,$$

sodass sogar $H = PN$ gelten muss.
Angenommen, $P \subseteq \pi^{-1}(\bar{Q})$ für eine weitere p-Sylowgruppe $\bar{Q}$ von ${}^{G}\!/\!_{N}$. Nach dem obigen Argument ist dann $\pi^{-1}(\bar{Q}) = PN = H = \pi^{-1}(\bar{P})$ und es folgt $\bar{P} = \bar{Q}$ nach dem Korrespondenzsatz.