LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
3. Dezember 2018

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte).

a) Es reicht zu zeigen, dass für alle i gilt $D^iG \leq G_i$. Wir wollen dies durch Induktion über i beweisen. Für $i = 0$ ist die Aussage klar, da per Definition gilt $D^0G = G = G_0$. Wir nehmen also an $D^iG \leq G_i$. Nach Voraussetzung gilt $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ und G_i/G_{i+1} ist abelsch. Also folgt aus Bemerkung 1.6.7 c), dass $(G_i)' \leq G_{i+1}$ gilt. Des weiteren kann man zeigen, dass gilt wenn $H \leq G$, dann gilt $H' \leq G'$. Damit folgt aber, dass $(D^iG)' \leq G_i'$ gilt. Somit bekommen wir insgesamt

$$D^{i+1}G = \left(D^iG\right)' \leq (G_i)' \leq G_{i+1},$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

b) Wir betrachten eine Normalreihe

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \ldots \trianglerighteq G_r = \{e\}.$$

bei der jeder Faktor G_i/G_{i+1} für $i = 0, \ldots, r-1$ eine endliche abelsche einfache Gruppe ist. Aus dem Tutorium wissen wir zudem das jede endliche abelsche einfache Gruppe Primzahlordnung haben muss und zusammen mit

$$\prod_{i\in I} p_i^{e_i} = |G| = \prod_{i=0}^{r-1} |G_i/G_{i+1}|$$

folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

a) & b) Wir werden die Aufgabe in derartiger Allgemeinheit lösen, dass sowohl a) als auch b) impliziert sind. Sei K ein beliebiger Körper und wir betrachten für $n \geq 1$ die invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen

$$U_n = \{(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} : a_{ij} = 0 \text{ für } j < i, a_{ii} \in K^\times\} \leq \mathrm{GL}_n(K).$$

Wir wollen zeigen, dass U_n auflösbar ist:
Man sieht einfah, dass

$$\begin{aligned} \pi : U_n &\longrightarrow (K^\times)^n \\ (\lambda_{ij})_{i,j} &\longmapsto (\lambda_{ii}) \end{aligned}$$

ein Epimorphismus ist. Sei $M = \ker(\pi)$. Dann gilt $U_n/M = (K^\times)^n$, also ist der Quotient abelsch. Wir bemerken, dass M aus den oberen Dreiecksmatrizen besteht, die immer den Wert 1 auf der Diagonalen haben. Das Problem ist nun darauf reduziert eine passende Normalreihe von M zu finden. Dazu wolllen wir folgende Matrizengruppen betrachten: Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ setzen wir

$$N_k = \{(a_{ij})_{i,j} \in M \mid a_{ij} = 0 \text{ für } 1 \leq j - i \leq k\}.$$

Man sieht schnell ein, dass diese N_k Untergruppen von M sind, für die gilt $N_k \leq N_{k-1}$ für alle k. Zudem gilt $N_0 = M$ und $N_{n-1} = \{e\}$. Um den Beweis abzuschließen müssen wir also zeigen, dass N_k ein Normalteiler von N_{k-1} mit abelschen Quotienten ist für jedes $k = 1, \ldots, n$. Dazu betrachten wir für $k = 1, \ldots, n$ die Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_k : N_{k-1} &\longrightarrow K^{n-k} \\ (\lambda_{ij})_{i,j} &\longmapsto (\lambda_{i,j+k}) \end{aligned}$$

und sehen ein, dass es sich wieder um einen Epimorphismus handelt. Wir erhalten also $\ker(\pi_k) = N_k$ für jedes k, also handelt es sich um einen Normalteiler und der Quotient ist abelsch da er isomorph zu einer (offensichtlich) abelschen Gruppe ist.

c) Dies folgt sofort aus Satz 1.6.8 aus der Vorlesung zusammen mit den zwei Fakten aus der Angabe.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Wir wollen zeigen, dass wenn zu jedem Teiler $d||G|$ genau eine Untergruppe U gibt mit $|U| = d$, dann ist G zyklisch.
Wir nehmen an G ist nicht-zyklisch. Wir finden ein $a \in G \setminus \{e\}$ mit $\langle a \rangle \subsetneq G$, also existiert ein $b \in G \setminus \langle a \rangle$, so dass $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \leq G$.
Wir unterscheiden nun zwei Fälle: Im ersten Fall gilt: $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b)) = t_1 > 1$, führt aber zu einem Widerspruch das $\left\langle a^{\mathrm{ord}(a)/t_1} \right\rangle \times \left\langle b^{\mathrm{ord}(b)/t_1} \right\rangle \cong \mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z}$ gilt und t_1 ein Teiler von $|G|$ ist. Im zweiten Fall ist nun $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b)) = 1$, also gibt es ein $c \in G$, so dass $\langle c \rangle \subsetneq G$ gilt. Also existiert ein $d \in G \setminus \langle c \rangle$ mit $\langle c \rangle \times \langle d \rangle \subset G$. Nun kann man wieder einer Fallunterscheidung wie oben machen. Unter der Voraussetzung nicht zyklisch muss irgendwann der erste Fall eintreten.

Aufgabe 4 (7 Punkte).

a) Seien $\alpha, \beta \in S_n$, $\alpha = (a_1 \ldots a_n)$, $\beta = (b_1 \ldots b_n)$ Zyklen der gleichen Länge n. Setze nun: $\sigma := \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$. Dann gilt: $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 b_2 \ldots b_n \\ a_1 a_2 \ldots a_n \end{pmatrix}$ und somit $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$.
Nun zum allgemeinen Fall: Seien $\alpha = (a_1 \ldots a_k)$, $\beta = (b_1 \ldots b_k)$ zwei k-Zyklen in der S_n. Dann definieren wir

$$\sigma := \begin{cases} \sigma(a_i) = b_i & \text{für } a_i \in \{a_1, \ldots, a_k\}, \\ \text{beliebige Bijektion } \sigma(a_j) = b_j & \text{für } a_j \in S_n \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \text{ und } b_j \in S_n \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}. \end{cases}$$

Da gilt $\sigma(a_1 \ldots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_k))$, haben wir die Aussage gezeigt.

b) Sei $\pi = (a_1 \ldots a_r)$. Dann gilt $\pi = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{r-1} a_r)$. Somit gilt aber $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{r-1}$, da sgn ein Homomorphismus ist.

c) Die $\langle\sigma\rangle$-Bahnen von X_n entsprechen genau den Zyklen in der (eindeutigen) Darstellung von disjunkten Zyklen. Hierbei notieren wir ausnahmsweise auch Zyklen der Länge 1.

Beispiel n**=6** Wir betrachten das Element

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die

$$\begin{array}{rr} \langle\sigma\rangle - \text{Bahn von } 1 & \{1\} \\ \langle\sigma\rangle - \text{Bahn von } 2 & \{2,6\} \\ \langle\sigma\rangle - \text{Bahn von } 3 & \{3,4,5\} \end{array}$$

und erhalten $\sigma = (1)(2\ 6)(3\ 4\ 5)$.

Sei nun $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ mit Zyklen der Länge ℓ_i. Dann gilt $\sum_{i=1}^m \ell_i = n$. Mit Teilaufgabe b) erhalten wir dadurch

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \prod_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\sigma_i) \\ &= \prod_{i=1}^m (-1)^{\ell_i - 1} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^m \ell_i - m} \\ &= (-1)^{n-m}. \end{aligned}$$