LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
19. November 2018

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (8 Punkte).

a) Wir wollen für alle $n \in \mathbb{N}$ das Zentrum der S_n bestimmen. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist S_n abelsch, es gilt also $Z(S_1) = S_1$ und $Z(S_2) = S_2$. Sei nun $n \geq 3$ und $\sigma \neq \mathrm{id}$ ein nicht-triviales Element der S_n. Dann gibt es ein i mit $\sigma(i) \neq i$ und ein $k \notin \{i, \sigma(i)\}$. Für $\tau := (\sigma(i)\ k)$ ist dann

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(i)$$
$$(\tau\sigma)(i) = k,$$

insbesondere gilt also $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, also ist $\sigma \notin Z(S_n)$. Da σ ein beliebiges nicht-triviales Element von S_n war, folgt $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ für $n \geq 3$.

b) Wir bestimmen das Zentrum gleich allgemein für $n \geq 3$, für kleinere n ist D_n abelsch und somit ist nichts mehr zu tun. Wir erinnern und an die Definition der Diedergruppe

$$D_n := \left\langle r, s \mid r^n = s^2 = e, srs = r^{-1} \right\rangle$$

und das dadurch gilt $r^{-1} = r^{n-1}$ und $s^{-1} = s$. Also erhalten wir für $1 \leq i \leq n-1$: $sr^i = r^{n-i}s$. Es gilt aber $r^i = r^{n-i}$ genau dann, wenn $i = n - i$, i.e. wenn n gerade und $i = n/2$ ist. Also erhalten wir $r^i \notin Z(D_n)$, wenn $i \neq n/2$ und $s \notin Z(D_n)$.
Wir nehmen also an, dass n gerade ist. Mit der Überlegung oben erhalten wir das $r^{n/2}$ mit s kommutiert. Außerdem kommutiert $r^{n/2}$ natürlich auch mit r^k für alle k und somit kommutiert $r^{n/2}$ auch mit allen sr^k. Daraus folgt: $r^{n/2} \in Z(D_n)$, wenn n gerade ist. Andererseits ist $sr^k \notin Z(D_n)$ für alle k da

$$r(sr^k) = sr^{-1}r^k = sr^{k-1}, (sr^k)r = sr^{k+1} \text{ und } r^{k-1} \neq r^{k+1}.$$

Also ist das Zentrum trivial, wennn n ungerade ist und für n gerade gilt: $Z(D_n) = \{e, r^{n/2}\}$.

c) Sei $Q_8 := \{\pm 1, \pm i \pm j, \pm k\}$ mit $ij = -ji$, $jk = -kj$ also gilt $\pm i, \pm j, \pm k \notin Z(Q_8)$. Somit kann man nun schnell einsehen, dass $Z(Q_8) = \{\pm 1\}$ gelten muss.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

Sei

$$A := \{U \leq G \mid \ker(f) \subseteq U\} \text{ und } B := \{V \leq H\}.$$

Wir betrachten

$$\alpha : A \longrightarrow B, \quad U \mapsto f(U),$$
$$\beta : B \longrightarrow A, \quad V \mapsto f^{-1}(V).$$

Diese Abbbildungen sind wohldefiniert, denn $f(U)$ und $f^{-1}(V)$ sind bekannterweise Untergruppen von H bzw. G. Ferner ist $\ker(f) \subseteq f^{-1}(V)$, da $f(g) = e_H \in V$ für alle $g \in \ker(f)$.
Wir zeigen nun (i) $\beta \circ \alpha = id_A$ und sodann (ii) $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_B$.
Zu (i): Wegen $(\beta \circ \alpha)(U) = f^{-1}(f(U))$ ist zu zeigen: $f^{-1}(f(U)) = U$. Sei dazu $g \in f^{-1}(f(U))$. Es gilt:

$$g \in f^{-1}(f(U)) \iff f(g) \in f(U) \iff \exists u \in U : f(g) = f(u).$$

Also ist $f(gu^{-1}) = e_H$, und somit $gu^{-1} \in \ker(f) \subseteq U$. Also auch $g \in U$. Die Umkehrung ist trivial.
Zu (ii): Hier ist zu zeigen: $V = f(f^{-1}(V))$. Sei dazu $h \in V$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $f(g) = h$. Also ist $g \in f^{-1}(V)$ und $h \in f(f^{-1}(V))$. Die Umkehrung ist wieder offensichtlich.
Sei nun U ein Normalteiler in G. Zu zeigen: $\alpha(U) = f(U)$ ist ein Normalteiler in H. Sei dazu $h \in H$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $f(g) = h$. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$h^{-1}f(u)h = f(g)^{-1}f(u)f(g) = f(g^{-1}ug) \in f(U), \text{ da } g^{-1}ug \in U.$$

Falls V ein Normalteiler in H ist, so ist zu zeigen, dass $f^{-1}(V)$ ein Normalteiler in G ist. Sei dazu $u \in f^{-1}(V)$ und $g \in G$. Dann gilt:

$$f(g^{-1}ug) = f(g)^{-1}f(u)f(g) \in V, \text{ da } f(u) \in V.$$

Also ist $g^{-1}ug \in f^{-1}(V)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Wir wissen bereits, dass für jedes Element g einer endlichen Gruppe G gilt $g^{|G|} = e$ und wir halten fest, dass in diesem Fall E_2 das neutrale Element ist. Wenn wir nun zeigen können, dass $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2-1)(p^2-p)$ gilt, sind wir fertig. In $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sind aber genau die Matrizen die aus zwei linear unabhängigen Vektoren über $\mathbb{F}_p$ bestehen. Ein Abzählargument liefert sofort, dass dies genau $(p^2-1)(p^2-p)$ sind, was zu zeigen war.

Aufgabe 4 (5 Punkte).
Sei $U \leq H = \langle a \rangle$. Dann ist $U = \langle a^k \rangle$ für ein geeignetes k. Sei $g \in G$. Da H ein Normalteiler ist, gilt $g^{-1}ag = a^t$ für ein geeignetes t. Für alle $s \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$g^{-1}a^{ks}g \overset{(*)}{=} \left(g^{-1}ag\right)^{ks} = a^{stk} \in \langle a^k \rangle = U.$$

Also ist U ein Normalteiler. Die Gleichung $(*)$ gilt, da Konjugation ein Homomorphismus ist.