LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
1. November 2018

Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (12 Punkte).

a) Die Abbildung $G \longrightarrow G, a \mapsto a^{-1}$ ist offensichtlich surjektiv. Da G endlich ist, ist sie damit auch bijektiv. Also gilt: $G = \{a^{-1} \mid a \in G\}$. Da nach Voraussetzung $ab = ba$ für alle $a, b \in G$ gilt, und ferner in G das Assoziativgesetz gilt, können wir wie folgt schließen:
$$\prod_{g \in G} g^2 = \left(\prod_{g \in G} g\right)\left(\prod_{g \in G} g^{-1}\right) = \prod_{g \in G} gg^{-1} = \prod_{g \in G} 1 = 1.$$

b) Man kann für die S_4 (per Hand) nachrechnen, dass die Aussage falsch ist. Wenn man sich ohne manuelle Rechenarbeit davon überzeugen will, kann man auch folgende Befehle in MAGMA[1] eintippen:

```
A:=[a ˆ 2 : a in SetToSequence(Set(Sym(4)))];
element:=&*A;
```

Wenn man sich nun "element" anzeigen lässt, sieht man, dass die Aussage im Allgemeinen falsch sein muss.

c) Zunächst beobachtet man: $a^{-1} = a$ für alle $a \in G$. Seien nun $a, b \in G$. Dann gilt: $abab = e$, nun multiplizieren wir von rechts b^{-1} und dann a^{-1} an die Gleichung und erhalten $ab = b^{-1}a^{-1}$, aber unsere Beobachtung liefert dann die gewünschte Aussage.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Man betrachte die Äquivalenzrelation $a \sim b :\iff a = b$ oder $a = b^{-1}$. Der Nachweis der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind einfach.

Jede Äquivalenzklasse hat entweder ein oder zwei Elemente. Die Äquivalenzklasse von $a \in G$ hat genau dann ein Element, wenn $a^{-1} = a$. Diese Bedingung ist offensichtlich äquivalent zu $a^2 = e$.

Man erinnere sich, dass G die disjunkte Vereinigung der paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen ist. Da die Äquivalenzklasse von e einelementig ist und die Gruppenordnung gerade ist, muss es eine weitere einelementige Äquivalenzklasse geben.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei
$$id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Wie Sie MAGMA starten können und andere hilfreiche Hinweise zur Verwendung des Programms finden Sie in einem Skript bereitgestellt auf der Webseite von Prof. Bley.

Man setzt zusätzlich:
$$C := A \cdot B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$
Damit rechnet man nun leicht die folgenden Identitäten nach:

(1) $A^2 = B^2 = C^2 = -id$

(2) $AB = C,\ BC = A,\ CA = B$

(3) $AB = -BA,\ BC = -CB,\ CA = -AC \ \Rightarrow\ BA = -C,\ CB = -A,\ AC = -B$

Damit gilt nun: $\operatorname{ord}(A) = \operatorname{ord}(B) = \operatorname{ord}(C) = 4$, $Q_8 = \{\pm id, \pm A, \pm B, \pm C\}$ ist nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 und es gilt: $Q_8 = \langle A, B | AB = -BA, A^2 = B^2 = -id \rangle$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Wir wissen bereits

$Q_8 = \{\pm id, \pm A, \pm B, \pm C\}$ und $D_4 := \left\langle a, b | a^4 = b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$

. Aus Aufgabe 3 erhalten wir die Untergruppen von Q_8:

- Triviale Untergruppen: $\{id\},\ Q_8$
- Untergruppen der Ordnung 2: $\{\pm id\}$
- Untergruppe der Ordnung 4: $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle$

Wegen $\operatorname{ord}(a) = 4,\ \operatorname{ord}(a^2) = 2,\ \operatorname{ord}(b) = \operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(a^2b) = \operatorname{ord}(a^3b) = 2$ kann man ebenso leicht die Untergruppen der D_4 ablesen:

- Triviale Untergruppen: $\langle 1 \rangle,\ D_4$
- Untergruppen der Ordnung 2:$\langle b \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^2b \rangle, \langle a^3b \rangle, \langle a^2 \rangle$
- Untergruppen der Ordnung 4: $\langle a \rangle, \langle ab \rangle \times \langle a^2 \rangle, \langle b \rangle \times \langle a^2 \rangle$

Offensichtlich sind diese beiden Gruppen nicht isomorph, da sie verschiedene Untergruppen-Strukturen haben.