



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
24. Dezember 2018

Algebra Ferienblatt

Aufgabe 1 (3 Punkte).

Sei p eine Primzahl, G eine p -Gruppe und N ein Normalteiler von Ordnung p . Zeigen Sie, dass N im Zentrum von G liegt.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von Ordnung 7 einer einfachen Gruppe der Ordnung $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Aufgabe 3 (3 Punkte).

Sei p ein Primzahl.

- Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren 2×2 -Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$.
- Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren 2×2 -Matrizen mit Koeffizienten $\mathbb{F}_p$ und mit Determinante $t \in \mathbb{F}_p^\times$.

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Sei $n \geq 5$, A_n die alternierende Gruppe und $\varphi : A_n \rightarrow H$ ein nicht-trivialer Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann gilt $n \mid |H|$.

Aufgabe 5 (3 Punkte).

Sei $|G| = 242$. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 6 (2 Punkte).

Überprüfen Sie, ob das Polynom $2x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 14x + 18$ irreduzibel über $\mathbb{Q}[x]$ ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte).

Sei R ein kommutativer Ring und für alle $a \in R$ existiere ein $n > 1$ mit $a^n = a$. Zeigen Sie, dass jedes Primideal in R auch ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte).

Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie:

- Dann gibt es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n mit $|K| = p^n$.
- Sei $[E : K] = m < \infty$, dann gilt $|E| = |K|^m$.

Aufgabe 9 (3 Punkte).

Sei $\text{char}(K) \neq 2$, K ein ansonsten beliebiger Körper. Zeigen Sie:

$$[E : K] = 2 \iff E = K(\alpha), \alpha \notin K, \alpha^2 \in K.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte).

- a) Sei E/K eine Körpererweiterung und K^c der algebraische Abschluss von K in E . Zeigen Sie:

$$K^c = \bigcup_F F,$$

wobei F die endlichen Körpererweiterungen F/K von E/K durchläuft.

- b) Sei E/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie:

$$E/K \text{ algebraisch} \iff E = \bigcup_F F$$

wobei F die endlichen Körpererweiterungen F/K von E/K durchläuft.

Nur eine vollständig ausgearbeitete Lösung kann mit der maximalen Anzahl an Punkten bewertet werden. Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 10. Januar 2019** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.