Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
17. Dezember 2018

Algebra
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Überprüfen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität:

a) $f(x) = x^{12} + 7x^3 + 21x + 77$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.

b) $g(x) = 10x^3 + 13x^2 + 93x + 11$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.

c) $h(x,y) = y^5 + y^3x - y^3 + yx^2 - 2xy + y + x^2 - x$ in $\mathbb{Q}[x,y]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Für einen kommutativer Ring R und ein Polynom $g \in R[X]$ definieren wir den Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi_g : R[X] \to R[X], \quad f \mapsto f(g)\,.$$

a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass Φ_g genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $g = aX + b$ mit $a \in R^\times$ und $b \in R$.

b) Sei p eine Primzahl. Benutzen Sie a) mit dem Polynom $g(X) = X + 1$ und das Eisensteinkriterium um zu zeigen, dass das Polynom $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R.

a) Zeigen Sie, dass das Ideal I genau dann prim ist, wenn $R \setminus I$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge ist.

b) Sei P ein Primideal in R. Zeigen Sie, $S^{-1}R$ ist ein lokaler Ring, falls $S = R \setminus P$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).
Zeigen Sie:

a) Sei p eine ungerade Primzahl. Das Element $1 + p$ hat die Ordnung $p^{\alpha-1}$ in $(\mathbb{Z}/p^\alpha\,\mathbb{Z})^\times$.

b) Es gilt $(\mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z})^\times \cong \langle 3 \rangle \times \langle 5 \rangle$.

Aufgabe 5 (6 Punkte).

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\left(\mathbb{F}_3[x]/(x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 2)\right)^\times$.

b) Zeigen Sie: Sei G eine abelsche Gruppe mit $g, h \in G$ und $\mathrm{ord}(g) = m$ und $\mathrm{ord}(h) = n$. Dann existiert ein $z \in G$ mit $\mathrm{ord}(z) = \mathrm{kgV}(m,n)$.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 20. Dezember 2018** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.