LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
7. Dezember 2018

Algebra
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{F}_2[x]$ mit

$$\begin{aligned} f &\equiv x \mod x+1 \\ f &\equiv 1 \mod x^2+x+1 \\ f &\equiv x^2 \mod x^3+x+1. \end{aligned}$$

Definition Ein **lokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit genau einem maximalen Ideal.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussage äquivalent sind:

i) R ist lokal.

ii) Alle Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ bilden ein Ideal.

iii) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ liegt in einem Ideal $M \neq R$.

Aufgabe 3 (9 Punkte).
Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Die Menge
$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid b \notin p\mathbb{Z}\}$$
ist mit der Addition und Multiplikation von $\mathbb{Q}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $p\mathbb{Z}_{(p)}$.

b) Sei K ein Körper. Der Potenzreihen $K[\![T]\!]$ mit Koeffizienten in K sind ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $TK[\![T]\!]$.

c) Die Potenzreihen $\mathbb{Z}_{(p)}[\![T]\!]$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_{(p)}$ sind ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (p, T).

Definition Ein Ring R heißt **noethersch**, wenn jede aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$ von Idealen in R stationär wird, d.h. wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\mathfrak{a}_{n_0} = \mathfrak{a}_{n_0+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Der Ring R ist noethersch.

ii) Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.

iii) Jede nichtleere Menge S von Idealen von R hat ein maximales Element $\mathfrak{m}$, d.h. für jedes Ideal $\mathfrak{a} \in S$ mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 13. Dezember 2018** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.