LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
3. Dezember 2018

Algebra
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (8 Punkte).

a) Sei M eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass
$$T_p(M) := \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : p^n m = 0\}$$
eine Untergruppe von M ist.

b) Laut Vorlesung wissen wir, dass für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe A gilt:
$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/p_j^{e_{ij}}\mathbb{Z}.$$
Zeigen Sie, dass gilt $T_{p_j}(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/p_j^{e_{ij}}\mathbb{Z}$.

c) Setze $T := T_p(A)$ für eine Primzahl $p := p_j$. Sei nun
$$T_p(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z} \text{ mit } e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_s.$$
Zeigen Sie, dass $p^n T/p^{n+1}T$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist und dass gilt
$$\dim_{\mathbb{F}_p}\left(p^n T/p^{n+1}T\right) = \#\{e_i \mid e_i > n\}.$$

d) Folgern Sie daraus die Eindeutigkeit der e_{ij}.

Aufgabe 2 (7 Punkte).

a) Finden Sie den kleinsten Unterring von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält.
Zeigen Sie, dass dieser ein Körper ist.

b) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

a) Wenn R nullteilerfrei ist, dann gilt $R[X]^\times = R^\times$.

b) $R[X]$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn R nullteilerfrei ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei R ein Ring. Eine *formale Potenzreihe* ist eine formale Summe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ mit $a_i \in R$. Für formale Potenzreihen ist eine Summe und ein Produkt so definiert, wie es die Summenschreibweise suggeriert. Mit diesen Operationen bildet die Menge $R[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen über R einen Ring.

a) Zeigen Sie: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist eine Einheit in $R[\![X]\!]$ genau dann, wenn a_0 eine Einheit in R ist.

b) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie alle Ideale in $K[\![X]\!]$.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 6. Dezember 2018** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.