LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
26. November 2018

Algebra
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (10 Punkte).
Zeigen Sie: Alle Gruppen der Ordnung kleiner als 60 sind auflösbar.

Aufgabe 2 (7 Punkte).
Zeigen Sie: Bis auf Isomorphie gibt es genau zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 8.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Seien G und H zwei abelsche Gruppen und $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie:

$$G \times_\varphi H \text{ ist abelsch} \iff \varphi(h) = \mathrm{id}_G \text{ für alle } h \in H.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte).
Sei p eine ungerade Primzahl.

a) Zeigen Sie: Das Element $1 + p$ hat Ordnung p in $\left(\mathbb{Z} / p^2 \mathbb{Z}\right)^\times$.

b) Sei $G = C_{p^2} = \langle a \rangle$, $H = C_p = \langle b \rangle$ und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ definiert durch $\varphi(b)(a) = a^{1+p}$. Zeigen Sie:

   i) φ ist wohldefiniert.

   ii) $G \times_\varphi H$ ist eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung p^3.

   iii) Das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Elemente von $G \times_\varphi H$ ist p^2.

c) Zeigen Sie, dass man folgende Darstellung für $G \times_\varphi H$ finden kann:

$$\left\langle a, b \mid \mathrm{ord}(a) = p^2, \mathrm{ord}(b) = p, ba = a^{1+p} b \right\rangle.$$

Hinweis: Man kann natürlich jetzt auch probieren eine ähnliche Konstruktion mit $G = C_p \times C_p$ zu machen.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 29. November 2018** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.