



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
18. November 2018

Algebra

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte).

Sei U eine Untergruppe der endlichen Gruppe G . Es gelte $[G : U] = p$, wobei p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist. Zeigen Sie, dass U dann ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte).

Sei G eine Gruppe der Ordnung 750. Zeigen Sie, dass G einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt. *Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von G auf die Menge der 5-Sylowgruppen durch Konjugation.*

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Es gibt keine nicht-abelsche einfache Gruppe der Ordnung $|G| = p^m q$, wobei p eine Primzahl ist, $p \nmid q$ und $p^m \nmid (q-1)!$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es nur endliche viele n -Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ von positiven ganzen Zahlen so dass $q = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i_j}$.
- b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, gibt es nur endlich viele (nicht-isomorphe) endliche Gruppen die genau n Konjugationsklassen haben.

Aufgabe 5 (5 Punkte).

Sei G eine endliche Gruppe und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass $n_p(G/N) \leq n_p(G)$ gilt, wobei n_p jeweils die Anzahl der p -Sylowgruppen bezeichnet.