



Algebra Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sei G eine Gruppe und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_r = \{e\}$$

eine Normalreihe von G . Dann nennt man r die Länge der Normalreihe.

- a) Zeigen Sie: Wenn n die Länge einer iterierten Kommutatorkette von G ist und r die Länge irgendeiner Normalreihe von G mit abelschen Faktoren, dann gilt stets $n \leq r$.
- b) Sei G eine endliche auflösbare Gruppe mit $|G| = \prod_{i \in I} p_i^{e_i}$.
Zeigen Sie: Jede Normalreihe mit einfachen abelschen Faktoren hat die Länge $\sum_{i \in I} e_i$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{F}_{p^n}$. Wir betrachten die Gruppe

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in K^\times, x \in K \right\} \leq \mathrm{GL}_2(K).$$

- a) Zeigen Sie: U_2 ist auflösbar.
- b) Versuchen Sie das Resultat für die Untergruppe U_n der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ für $n \geq 2$ zu verallgemeinern.
- c) Sei $n \geq 3$ oder $|K| \neq 2$. Es gilt dann $(\mathrm{GL}_n(K))' = \mathrm{SL}_n(K)$ und $(\mathrm{SL}_n(K))' = \mathrm{SL}_n(K)$, was Sie hier ohne Beweis annehmen dürfen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(K)$ nicht auflösbar ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Wenn es zu jedem Teiler d von $|G|$ genau eine Untergruppe U von G gibt mit $|U| = d$, dann ist G zyklisch.

Aufgabe 4 (7 Punkte).

- a) Zeigen Sie: Zyklen gleicher Länge sind konjugiert.
- b) Sei $\pi \in S_n$ ein r -Zyklus. Zeigen Sie: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{r-1}$.
- c) Sei $\sigma \in S_n$ und $\langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte zyklische Untergruppe. Weiter sei m die Anzahl der $\langle \sigma \rangle$ -Bahnen bezüglich der natürlichen Aktion auf $X_n = \{1, \dots, n\}$.
Zeigen Sie: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-m}$.