Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
9. November 2018

Algebra
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte).
Sei $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen, wobei q eine Primpotenz p^n mit $p \neq 2$ ist. Zeigen Sie:

a) $|\{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\}| = \frac{q+1}{2}$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{F}_q$. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{F}_q$, so dass $x^2 + y^2 = \alpha$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte).
Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Dann definieren wird den Kommutator von x und y als $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$. Für zwei Untergruppen $U, V \leq G$ ist der Kommutator $[U, V]$ definiert als die von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$ und $y \in V$ erzeugte Untergruppe in G. Zur Vereinfachung setzen wir $G' := [G, G]$.

a) Zeigen Sie: G ist abelsch genau dann, wenn $G' = \{1\}$.

b) Zeigen Sie: Jede Untergruppe U von G mit $G' \subseteq U \leq G$ ist normal in G.

c) Zeigen Sie: Für einen Normalteiler N von G gilt: G/N ist abelsch genau dann, wenn $G' \subseteq N$.

d) Bestimmen Sie S_n' für $n \geq 2$ und A_n' für $n = 2, 3, 4$, wobei A_n die alternierende Gruppe und S_n die symmetrischen Gruppe ist.

Aufgabe 3 (9 Punkte).
Sei G eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Der Normalisator von H in G ist definiert durch

$$N_G(H) := \{x \in G : xH = Hx\}.$$

Zeigen Sie:

a) $N_G(H)$ ist eine Untergruppe in G.

b) Ist H eine Untergruppe von G, so ist $N_G(H)$ die größte aller Untergruppen $U \subset G$ mit der Eigenschaft, dass H ein Normalteiler in U ist.

c) $N_G(H)$ ist im Allgemeinen kein Normalteiler in G.

d) Sei U eine Untergruppe von G mit endlichem Index. Dann ist die Kardinalität der Menge $\{gUg^{-1} \mid g \in G\}$ endlich.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

a) Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie: Es gibt Normalteiler $N \triangleleft \mathrm{GL}_2(K)$ mit abelschem Quotienten der Ordnung $|K| - 1$.

b) Zeigen Sie: Die symmetrische Gruppe S_4 ist auflösbar.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 8. November 2018** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.