



Algebra Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Das Zentrum einer Gruppe G ist definiert durch

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg, \forall h \in G\}.$$

Bestimmen Sie das Zentrum der folgenden Gruppen:

- a) der Symmetrischen Gruppe S_n für $n \in \mathbb{N}$.
- b) der Diedergruppe D_4 .
- c) der Quaternionengruppe Q_8 .

Aufgabe 2 (5 Punkte).

Sei $f : G \rightarrow H$ ein Epimorphismus von Gruppen. Zeigen Sie: Die Abbildung $U \mapsto f(U)$ ist eine Bijektion zwischen den Untergruppen $U \leq G$ mit $\ker(f) \subseteq U$ und den Untergruppen $V \leq H$. Dabei entsprechen sich die Normalteiler.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei $M \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, wobei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen ist, und E_2 die Einheitsmatrix. Zeigen Sie: $M^{(p^2-1)(p^2-p)} = E_2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

Sei H eine zyklische, normale Untergruppe einer Gruppe G . Zeigen Sie: Jede Untergruppe von H ist normal in G .