LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
7. Februar 2019

Algebra
Übungsblatt 13

Aufgabe 1

a) Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f = (X^2 - 2)(X^2 + 1) \in \mathbb{Q}[X]$. Es ist dann $L/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sowie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$!

b) Sei nun M der Zerfällungskörper von $g = X^4 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass $M/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung von Grad 8 ist und dass $G(M/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist. Bestimmen Sie zudem Zwischenkörper E und E' von $M/\mathbb{Q}$ so, dass $E/\mathbb{Q}$ galoissch ist, $E'/\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

Aufgabe 2
Sei E/K galoissch mit $G(E/K) \cong S_n$, $n \geq 5$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau einen Zwischenkörper F von E/K mit $[F : K] = 2$.

b) Dieser Zwischenkörper F ist galoissch über K.

c) Es gibt keinen echten Zwischenkörper L von E/F, so dass L/F galoissch ist.

d) Es gibt keinen echten Zwischenkörper L von E/F, so dass L/F normal ist.

e) Sei nun n eine Primzahl p. Dann gibt es $(p-2)!$ Zwischenkörper N von E/K, so dass $[N : K] = (p-1)!$.

Aufgabe 3
Sei E/K eine endliche und separable Körpererweiterung, E' die normale Hülle von E/K, $\overline{E}$ der algebraische Abschluss von E und $G := G(E'/K)$. Es existiert also ein primitives Element $\alpha \in E$, d.h. $E = K(\alpha)$. Wir setzen dann $f := \mathrm{Mipo}_K(\alpha)$ und $N := \{\beta \in \overline{E} \mid f(\beta) = 0\}$.

a) Zeigen Sie: N ist eine G-Menge.

b) Zeigen Sie: Es existiert ein injektiver Homomorphismus $\varphi : G \to S(N) \cong S_n$, wobei $n = |N| = [E : K]$.

c) Sei $n \leq 4$. Zeigen Sie: Es gibt $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_m = E'$ so dass K_{i+1}/K_i für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ galoissch mit zyklischer Galoisgruppe ist.

Aufgabe 4
Sei E/K eine galoissche Körpererweiterung.

a) Zeigen Sie: Ist F ein Zwischenkörper von E/K und F/K nicht normal, dann ist $G(E/K)$ nicht abelsch.

b) Zeigen Sie: Ist $G(E/K)$ eine endliche p-Gruppe, dann existiert ein Zwischenkörper F von E/K so dass gilt:

   i) $G(E/F)$ ist abelsch vom Grad p und

   ii) F/K ist galoissch.

Für dieses Übungsblatt ist keine Abgabe mehr vorgesehen.