



Algebra Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

- a) Zeigen Sie: Ist f irreduzibel, so ist f genau dann separabel, wenn $f \notin K[X^p]$.
- b) Zeigen Sie, dass K genau dann vollkommen ist, wenn $K^p = K$, wobei $K^p := \{a^p \mid a \in K\}$.
- c) Folgern Sie, dass jeder endliche Körper vollkommen ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte).

Das Polynom

$$f = X^4 - 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$$

sei irreduzibel, und L bezeichne seinen Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$. Ferner sei

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - b}).$$

Beweisen Sie:

- a) Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = 4$ genau dann, wenn $\sqrt{b} \in K$.
- b) Ist $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, so ist $G(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- c) Ist $\sqrt{b} \in K \setminus \mathbb{Q}$, so ist $G(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- d) Das Element $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
- e) Welche Struktur hat die Galoisgruppe $G(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei E/K eine endliche Körpererweiterung mit Grad n . Zeigen Sie, dass E/K genau dann galoissch ist, wenn $|G(E/K)| = n$ ist.

Hinweis: Eine Richtung dieser Aussage haben wir bereits in der Vorlesung gezeigt.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit Grad n und sei $\alpha \in L$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $L = K(\alpha)$ und L/K separabel $\Leftrightarrow \alpha$ hat n paarweise verschiedene Konjugierte.