



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
18. Januar 2019

Algebra Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, $m \in \mathbb{N}_{>1}$ quadratfrei und E der Zerfällungskörper von $x^p - m$.

- Bestimmen Sie $G := G(E/\mathbb{Q})$.
- Zeigen Sie: $G \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_p^\times, \beta \in \mathbb{F}_p \right\}$.
- Folgern Sie für $p = 3$ und $m = 2$, dass gilt $G(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1+i})$ mit $i^2 = -1$.

- Zeigen Sie, dass $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1+i}, \sqrt{2})$ die normale Hülle von $K/\mathbb{Q}$ ist.
- Bestimmen Sie $G(E/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei p eine Primzahl.

- Zeigen Sie: Jeder endliche Körper ist isomorph zu $\mathbb{F}_p[X]/(f(X))$ für ein irreduzibles, normiertes Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$.
- Folgern Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ gibt mit $\deg(f) = n$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = p > 0$ und $F : K \rightarrow K, a \mapsto a^p$ der Frobenius-Homomorphismus. Zeigen Sie:

- Sei α eine Nullstelle von $X^p - b$ mit $b \in K$ und $L = K(\alpha)$. Dann ist L/K normal.
- Ist $b \in K$ keine p -te Potenz, so ist $f := X^p - b \in K[X]$ irreduzibel und nicht separabel.
- F ist genau dann ein Automorphismus von K , wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.¹

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 24. Januar 2019** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.

¹Eine Erweiterung E/K nennt man *separabel*, wenn jedes Element aus E separabel über K ist.