LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
11. Januar 2019

Algebra
Übungsblatt 10

Definition 1 *Sei $f \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Ein Erweiterungskörper L von K heißt* Zerfällungskörper *(über K) von f, wenn gilt:*

i) Das Polynom f zerfällt in L vollständig in Linearfaktoren.

ii) Die Körpererweiterung L/K wird von den Nullstellen von f erzeugt.

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Gegeben sei das Polynom $f = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ der Zerfällungskörper von f ist.

b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung L über $\mathbb{Q}$.

c) Beweisen Sie: $a = \sqrt[4]{3} + i$ ist ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom vom Grad n. Sei L ein Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie:

a) Der Grad $[L : K]$ ist ein Teiler von $n!$.

b) Gilt $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Betrachten Sie $f(X) = X^6 - 7X^4 + 3X^2 + 3 \in K[X]$ mit

a) $K = \mathbb{Q}$ bzw.

b) $K = \mathbb{F}_{13}$.

Zerlegen Sie jeweils f in seine irreduziblen Faktoren und bestimmen Sie einen kleinsten Erweiterungskörper von K, über dem f vollständig in Linearfaktoren zerfällt (d.h. einen Zerfällungskörper von f).

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei K ein Körper und E_1 und E_2 zwei algebraisch abgeschlossene Erweiterungen von K. Sei $\overline{K}_1$ bzw. $\overline{K}_2$ der algebraische Abschluss von K in E_1 bzw. E_2.

Sei $L \subseteq \overline{K}_1$ eine algebraische Erweiterung von K.

a) Zeigen Sie, dass für jeden Körperhomomorphismus $\sigma : L \to E_1$ mit $\sigma_{|K} = \mathrm{id}_K$ (also ein K-Homomorphismus), das Bild $\sigma(L)$ in $\overline{K}_1$ enthalten ist.

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der K-Körperhomomorphismen $\sigma : L \to E_1$ gleich der Anzahl der K-Körperhomomorphismen $\sigma : L \to E_2$ ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Donnerstag, 17. Januar 2019** um **14:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen in leserlicher Form.