LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2015/16
12. Februar 2016

Algebra (Lehramt Gymnasium)

Hauptklausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Lehramt Gymn. (modularisiert) ❍ Lehramt Gymn. (nicht modul.)

❍ Anderes: ______________________

Prüfungsordnung: ______________________

❏ Ich stimme zu, dass mein Klausurergebnis im Internet nach Angabe meiner Matrikelnummer und meines bei Klausuranmeldung angegebenen Passworts abrufbar sein wird.

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Versehen Sie auch zusätzliche Blätter mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer. Vermerken Sie deutlich, wenn Ihre Lösung auf weiteren Blättern fortgesetzt wird.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **150 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	Summe
/12	/6	/6	/12	/12	/12	/60

Name: ____________________

Aufgabe 1. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung $665 = 5 \cdot 7 \cdot 19$ bis auf Isomorphie.

b) Sei nun G eine Gruppe der Ordnung 665.
Zeigen Sie, dass G drei Sylowuntergruppen hat und zeigen Sie, dass diese Untergruppen Normalteiler von G sind.

Im Folgenden wollen wir die Normalteiler von G aus Teilaufgabe b) mit N_5, N_7 bzw. N_{19} bezeichnen.

c) Zeigen Sie, dass G/N_i für $i \in \{5, 7, 19\}$ jeweils eine zyklische Gruppe ist.

d) Zeigen Sie, dass die Kommutatorgruppe G' trivial ist.

e) Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 665 bis auf Isomorphie.

Lösung.

a) Die einzigen möglichen Elementarteiler sind $5, 7, 19$. Äquivalent dazu ist 665 der einzige Invariantenteiler. Es gibt also genau eine abelsche Gruppe der Ordnung 665, nämlich C_{665}.

b) Wir bezeichnen für $p \in \{5, 7, 19\}$ die Anzahl der p-Sylowuntergruppen mit λ_p. Dann gilt wegen $\lambda_5 \equiv 1 \pmod 5$ und $\lambda_5 \mid 7 \cdot 19$, dass $\lambda_5 = 1$. Ebenso: $\lambda_7 \equiv 1 \pmod 7$ und $\lambda_7 \mid 5 \cdot 19$ impliziert $\lambda_7 = 1$. Und letztlich: $\lambda_{19} \equiv 1 \pmod{19}$ und $\lambda_{19} \mid 5 \cdot 7$ impliziert $\lambda_{19} = 1$. Da es jeweils genau eine p-Sylowuntergruppe gibt, ist diese normal.

c) G/N_5 ist eine Gruppe der Ordnung $7 \cdot 19$. Da $7 \nmid (19 - 1)$ gilt, folgt aus Protokoll, Satz 1.9.6, dass G/N_5 zyklisch ist. Völlig analog kann man für $p = 7$ und $p = 19$ argumentieren.

d) Nach Übungsblatt 4, Aufgabe 2, ist G/N_p genau dann abelsch, wenn $G' \subseteq N_p$ gilt. Folglich ist nach b) G' im Durchschnitt der N_p enthalten. Dieser Durchschnitt ist dann trivial.

e) Da G' trivial ist, ist G abelsch. Also gibt es bis auf Isomorphie nur die abelsche Gruppe C_{665}, die in a) bestimmt wurde.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei p eine Primzahl und G eine nicht-abelsche Gruppe mit $|G| = p^3$.
Zeigen Sie: Das Zentrum von G hat Ordnung p.

Lösung.
Sei $n := |Z(G)|$. Nach dem Satz von Lagrange gilt $n \mid p^3$. Da das Zentrum einer p-Gruppe nicht-trivial ist, ist $n \neq 1$. Da G nach Voraussetzung nicht-abelsch ist, ist $n \neq p^3$. Angenommen $n = p^2$. Dann ist $G/Z(G)$ zyklisch von der Ordnung p. Es gibt also $a \in G \setminus Z(G)$ mit $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$. Also ist G die disjunkte Vereinigung der Nebenklassen $a^i Z(G)$ mit $0 \leq i \leq p-1$. Beliebige Elemente sind also von der Form $a^i z$ mit $z \in Z(G)$. Man sieht nun sofort, dass dann G abelsch ist. Widerspruch!
Damit ist also $Z(G)$ von der Ordnung p.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei G eine Gruppe der Ordnung $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Lösung. Sei λ die Anzahl der 5-Sylowuntergruppen. Aus $\lambda \equiv 1 \pmod 5$ und $\lambda \mid 12$ erhält man $\lambda \in \{1, 6\}$. Falls $\lambda = 1$, so ist die 5-Sylowgruppe ein nicht-trivialer Normalteiler. Falls $\lambda = 6$, so sei $M := \{P_1, \dots, P_6\}$ die Menge der 5-Sylowuntergruppen. Sei $S(M)$ die Gruppe der Permutationen von M. Dann haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\longrightarrow S(M), \\ g &\mapsto (P_i \mapsto g^{-1}P_i g). \end{aligned}$$

Falls φ injektiv wäre, so wäre $|G| = 300$ ein Teiler von $|S(M)| = 6! = 720$, ein Widerspruch. Also ist φ nicht injektiv und $\ker(\varphi) \neq 1$. Da die Konjugation transitiv auf M wirkt, gilt $\ker(\varphi) \neq G$. Also ist insgesamt $\ker(\varphi)$ ein nicht-trivialer Normalteiler.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (12 Punkte)
Sei $f := X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

b) Seien nun α, β Nullstellen von f aus Teilaufgabe a) mit $\alpha \neq \pm\beta$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ und $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ galoissch über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist und, dass $G(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})) \cong V_4$, gilt, wobei V_4 die Klein'sche Vierergruppe ist.

Lösung.

a) Da $\mathbb{Q} = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$ und $\mathbb{Z}$ faktoriell ist, können wir das Eisensteinkriterium (Protokoll Zahlentheorie Satz 1.4.9) für $p = 2$ anwenden.

Zur Bestimmung der Nullstellen substituieren wir $Y = X^2$. Die Nullstellen von $Y^2 - 2Y - 2$ sind gegeben durch $1 \pm \sqrt{3}$, also sind die Nullstellen von f gegeben durch $\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{3}}$.

b) Sei nun etwa $\alpha := \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ und $\beta := \sqrt{1 - \sqrt{3}}$. Wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.
Wegen $\alpha^2 = 1 + \sqrt{3}$ bzw. $\beta^2 = 1 - \sqrt{3}$ folgt $\sqrt{3} = \alpha^2 - 1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ bzw. $\sqrt{3} = 1 - \beta^2 \in \mathbb{Q}(\beta)$. Hieraus folgt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)$.

Da f irreduzibel ist, ist f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Daher gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. Wegen $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$. Damit folgt zusammen mit der Gradformel $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)$.

c) Als Zerfällungskörper von f ist $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ normal über $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ perfekt ist, ist $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ automatisch separabel. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q})$ galoissch und damit ist auch $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ galoissch.

Wegen $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ ist $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] \geq 2$. Also ist $g := X^2 - (1 - \sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$ das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}(\alpha)$. Es ist also $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$ bzw. nach der Gradformel $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 4$.

Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist gegeben durch $h := X^2 - (1 + \sqrt{3})$. Also hat $G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ die beiden Automorphismen id und τ, wobei $\tau(\alpha) = -\alpha, \tau|_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})} = id$ gilt. Sei nun $\sigma \in \{id, \tau\}$. Um die Fortsetzungen von σ zu bestimmen, muss man β auf die Nullstellen von σg abbilden. Dies liefert für $\sigma = id$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad \beta \mapsto \beta, \\ \gamma_2 &: \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad \beta \mapsto -\beta. \end{aligned}$$

Für $\sigma = \tau$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma_3 &: \quad \alpha \mapsto -\alpha, \quad \beta \mapsto \beta, \\ \gamma_4 &: \quad \alpha \mapsto -\alpha, \quad \beta \mapsto -\beta. \end{aligned}$$

Insgesamt ist $G(\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}(\sqrt{3})) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_4\}$. Wegen $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = id$ ist dies die Klein'sche Vierergruppe V_4.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (12 Punkte)

a) Sei L/K galoissch mit $G(L/K) \cong C_{12}$, wobei C_{12} die zyklische Gruppe der Ordnung 12 ist. Bestimmen Sie die Anzahl der echten Zwischenkörper von L/K, d.h. die Anzahl aller Zwischenkörper F mit $F \neq K$ und $F \neq L$.

b) Sei p eine Primzahl, L/K galoissch mit $|G(L/K)| = n$, $p \mid n$ und $n = p^e m$ mit $(p, m) = 1$. Wir nehmen zusätzlich an, dass es genau eine p-Sylowuntergruppe gibt. Wie viele normale Körpererweiterungen F/K gibt es in L mit $[F : K] = m$?

c) Sei $K := \mathbb{F}_3(T)$ und wir definieren $f := X^3 - (T + 2) \in K[X]$. Sei außerdem E der Zerfällungkörper von f. Zeigen Sie: Die Körpererweiterung E/K ist nicht galoissch.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Lösung.

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass es für jedes $n \mid |C_{12}| = 12$, genau ein Untergruppe $H_n \leq C_{12}$ gibt mit H_n zyklisch und $|H_n| = n$. Der Hauptsatz der Galoistheorie (Satz 3.1.8 Protokoll) besagt, dass es eine Bijektion $H_n \mapsto L^{H_n}$ mit $H_n \leq C_{12} \cong G(L/K)$, i.e. den Untergruppen von C_{12}, und den Zwischenkörpern von L/K gibt. Das heißt aber, dass wir nur die Untergruppen zählen müssen. $\{2, 3, 4, 6\}$ sind die nicht-trivialen Teiler von 12, also gibt es 4 nicht-triviale Zwischenkörper.

b) Wir betrachten die p-Sylowuntergruppen von $G(L/K)$. Per Voraussetzung gibt es nur eine p-Sylowuntergruppe und diese ist dann laut Vorlesung ein Normalteiler. Wir nennen diesen Normalteiler N. Der Hauptsatz der Galoistheorie (Satz 3.1.8 Protokoll) gibt uns nun eine Bijektion zwischen den Untergruppen von $G(L/K)$ und den Zwischenkörpern von L/K. Außerdem gilt nach gilt nach Satz 3.1.8 iii), dass eine Erweiterung F/K mit $K \subseteq F \subseteq L$ genau dann galoissch ist, wenn $G(L/F) \lhd G(L/K)$. Setzen wir nun $F := L^N$ gilt, haben wir insgesamt gezeigt, dass F/K die einzige galoissche Erweiterung ist für die $[F : K] = |G(F/K)| = m$ gilt. Damit folgt auch, dass F/K die einzige normale Körpererweiterung ist, da eine algebraische Erweiterung genau dann galoissch ist, wenn sie separabel und normal ist und Satz 2.6.10 gilt.

c) Eine algebraische Erweiterung ist genau dann galoissch, wenn sie separabel und normal ist. Per Voraussetzung ist E der Zerfällungskörper von f. Es gilt nun $f' = 3X^2 = 0$ in $\mathbb{F}_3(T)[X]$. Also folgt nach Vorlesung, dass f nicht separabel und somit E/K nicht separabel ist. Insgesamt folgt, dass E/K nicht galoissch ist.

Name: ______________________

Aufgabe 6. (12 Punkte)
Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Das regelmäßige 40-Eck ist konstruierbar.

b) Jede einfache auflösbare Gruppe ist abelsch.

c) Der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{C}$.

d) Es gibt keine Untergruppe der S_4 mit Ordnung 6.

e) Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = p > 0$. Dann gilt $|K| < \infty$.

f) Sei $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$. Es gilt dann $\sigma^{2016} = \sigma$.

Lösung.

a) Wahr, da $40 = 8 \cdot 5$ und $5 = 1 + 2^2$ (siehe Protokoll, Satz 3.2.2).

b) Wahr, denn aus auflösbar folgt, dass es eine Normalreihe $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \subseteq G_r = 1$ mit abelschen Faktoren gibt. Da G einfach ist, muss also $G_1 = 1$ gelten und $G/G_1 \simeq G$ ist abelsch.

c) Falsch, zum Beispiel ist π transzendent.

d) Falsch, betrachtet man nämlich zum Beispiel die Untergruppe H der Permutationen, die 4 fix lassen, so ist H isomorph zur S_3.

e) Falsch, zum Beispiel hat der rationale Funktionenkörper $\mathbb{F}_p(T)$ unendlich viele Elemente (und natürlich Charakteristik p).

f) Wahr, da $\operatorname{ord}(\sigma) = 5$ und $2016 \equiv 1 \pmod 5$.