LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2015/16
1. April 2016

Algebra (Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Lehramt Gymn. (modularisiert) ❍ Lehramt Gymn. (nicht modul.)

❍ Anderes: ____________________

Prüfungsordnung: ____________________

❏ Ich stimme zu, dass mein Klausurergebnis im Internet nach Angabe meiner Matrikelnummer und meines bei Klausuranmeldung angegebenen Passworts abrufbar sein wird.

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Versehen Sie auch zusätzliche Blätter mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer. Vermerken Sie deutlich, wenn Ihre Lösung auf weiteren Blättern fortgesetzt wird.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **150 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	Summe
/10	/6	/6	/12	/12	/12	/58

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 24. (4 Punkte)

b) Die Gruppe
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \mid \det(A) = 1\},$$
d.h. die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Determinante 1 über dem Körper $\mathbb{F}_3$, hat 24 Elemente. Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ ein nicht-triviales Zentrum hat. (2 Punkte)

c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 24 an und zeigen Sie, dass diese nicht isomorph sind. (4 Punkte)

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass der Index des Zentrums $Z(G)$ in G keine Primzahl sein kann, d.h. $[G : Z(G)] \neq p$ für alle Primzahlen p.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

a) G hat einen Normalteiler N mit $|N| = 5$ oder $|N| = 7$. (4 Punkte)

b) G ist auflösbar. (2 Punkte)

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (12 Punkte)
Es sei $f := x^4 - 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$. (3 Punkte)

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ galoissch ist. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie explizit die Galoisgruppe $G = G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ und zeigen Sie, dass G zyklisch ist. (5 Punkte)

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (12 Punkte)

a) Sei L/K galoissch und $[L : K] = 77$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe zyklisch ist und bestimmen Sie die Anzahl der echten Zwischenkörper F von L/K, d.h. die Anzahl der Zwischenkörper F mit $F \neq K$ und $F \neq L$. (4 Punkte)

b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$ mit $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und dass die Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.
Beschreiben Sie zudem die Galoiskorrepondenz für diese Galoisgruppe explizit durch Angabe der Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$ und der korrespondierenden Untergruppen. (8 Punkte)

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (12 Punkte)
Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen (jeweils 3 Punkte):

a) Man kann einen Würfel mit Volumen 40 mit Zirkel und Lineal konstruieren.

b) Sei p eine Primzahl und E der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$. Sei $f \in \mathbb{F}_p[x]$ irreduzibel über $\mathbb{F}_p$. Dann gibt es ein $\beta \in E$, so dass $(x - \beta)$ ein Teiler von f und $(x - \beta)^2$ kein Teiler von f ist.

c) In der symmetrischen Gruppe S_{10} gibt es ein Element der Ordnung 21.

d) Wenn $G(L/K) \cong G(M/K)$ für zwei Galoiserweiterungen L/K und M/K gilt , dann gilt $L \cong M$.

Name: ____ Fortsetzung zu **Aufgabe 6**.