Übungen zur Stochastik

13.1 $\mathbb{Q}$ sei die Verteilung auf $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{Q}\left(\{(x,y) \mid |x| \neq |y|\}\right) = 0$ und

$$\mathbb{Q}\left(\{(t,t) \mid a \leq t \leq b\}\right) = \mathbb{Q}\left(\{(t,-t) \mid a \leq t \leq b\}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

für $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

(a) Machen Sie sich klar, dass auf diese Weise ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf den messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ definiert ist! (Ein strenger maßtheoretischer Beweis ist nicht nötig.)

(b) Zeigen Sie, dass die Randverteilungen von $\mathbb{Q}$ Normalverteilungen sind, $\mathbb{Q}$ selber aber keine Normalverteilung ist!

(c) X, Y seien Zufallsgrößen mit Verteilung $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass diese dann unkorreliert, aber anders als im auf dem letzten Blatt betrachteten Fall gemeinsamer Normalverteilung nicht unabhängig sind!
Berechnen Sie dazu $\mathbb{E}(XY)$ so über

$$f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\delta(x-y) + \delta(x+y)\right) \,,$$

als würde es sich dabei um eine gewöhnliche gemeinsame Dichte von X und Y handeln!

13.2 Seien X_i mit $i \in \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\{0,1\}$, so dass $\mathbb{P}_{X_1}(1) = p$ sowie $\mathbb{P}_{X_1}(0) = 1-p$ für ein $0 < p < 1$. Weiter definieren wir $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n X_i$ und $T_k \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Was beschreibt T_k? Man bestimme die Verteilung von T_k und zeige, dass

$$\mathbb{P}(T_{k+l} = s+t \mid T_k = t) = \mathbb{P}(T_l = s)$$

für $k, l, s, t \in \mathbb{N}$ gilt!