Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 12
13.1.2017

Übungen zur Stochastik

12.1 *Mehrdimensionale Normalverteilung*
$X = (X_1, \dots, X_n)^T$ seien unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen.

(a) Wie lautet die Dichte der Verteilung von X?

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$ (d.h. eine invertierbare $n \times n$-Matrix). Zeigen Sie, dass die Dichte der Verteilung von $Y := AX + a$

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det A|} e^{-\frac{1}{2}(y-a)^T (AA^T)^{-1}(y-a)}$$

lautet!
Eine solche Verteilung heißt n-dimensionale Normalverteilung, $Y_1, \dots, Y_n$ heißen gemeinsam normalverteilt.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y_k)$, $Var(Y_k)$ und die Kovarianzen

$$Cov(Y_k, Y_l) := \mathbb{E}\left[(Y_k - \mathbb{E}(Y_k))\,(Y_l - \mathbb{E}(Y_l))\right]$$

für $k, l \in \{1, \dots, n\}$!
Diese Größen kann man zum Erwartungswertvektor $a := \mathbb{E}(\vec{Y})$ und der Kovarianzmatrix

$$C := \mathbb{E}\left[(Y-a)\,(Y-a)^T\right]$$

zusammenfassen, wobei die Erwartungswerte komponentenweise zu verstehen sind. Folgern Sie mit Hilfe von b), dass eine mehrdimensionale Normalverteilung durch a und C eindeutig bestimmt ist!

(d) Zeigen Sie: Gemeinsam normalverteilte Zufallsgrößen sind genau dann unabhängig, wenn Sie paarweise unkorreliert sind, d.h. $Cov(Y_k, Y_l) = 0$ für $k \neq l$ gilt!

(e) Für welche Wahlen von a und A sind auch $Y_1, \dots, Y_n$ wieder unabhängig und standardnormalverteilt?

(f) Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wie ist $v \cdot Y$ verteilt? Wie ist BY verteilt, wenn $B \in GL(n, \mathbb{R})$ ist? Sind $v_1 \cdot Y, \dots, v_n \cdot Y$ gemeinsam normalverteilt, wenn $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind?

12.2 *Brownsche Bewegung*
Sei $B(t)$ der Ort des Brownschen Teilchens (im eindimensionalen Raum) zu Zeit t. $B(t)$ ist gemäß der Dichte $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t D}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$ verteilt.

(a) Man zeige $\lim_{t\to 0} p(t,x) = \delta(x)$ im Sinne, dass für alle beschränkten stetigen Funktionen f

$$\lim_{t\to 0} \int f(x) p(x,t) \mathrm{d}x = f(0)$$

gilt!

(b) Man berechne das zweite Moment $\mathbb{E}(B(t)^2)$ von $B(t)$!

(c) Man berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D s}} e^{-\frac{x^2}{2Ds}} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-s)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2D(t-s)}} dx$$

für $s \leq t$ und interpretiere das Ergebnis anhand der Pfade des Brownschen Teilchens im mikroskopischen Modell!

(d) Man zeige, dass $p(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t)$$

löst!