Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 10
16.12.2016

Übungen zur Stochastik

10.1 Wir betrachten u.i.v. (=i.i.d.) quadratintegrierbare Zufallsgrößen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf einem Typizitätsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. $\tilde{\mathbb{P}}$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, das Dichte f bezüglich $\mathbb{P}$ hat, d.h. $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ ist Borel-messbar und $\tilde{\mathbb{P}}(A) := \int_A f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$. f sei beschränkt.

Müssen die X_i bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$ u.i.v. sein? Konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ in Wahrscheinlichkeit bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$, d.h. gilt das Gesetz der großen Zahlen auch $\tilde{\mathbb{P}}$-typischerweise? Geht dann $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ gegen $\mathbb{E}(X_1)$ oder $\tilde{\mathbb{E}}(X_1)$? Können Sie eine Konvergenzrate angeben?

10.2 Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_k^2) < \infty$. Weiter sei $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
Zeigen Sie, dass nach dem zentralen Grenzwertsatz

$$\mathbb{P}\big(S_n \in (a,b)\big) \approx \Phi\Big(\frac{b - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X)}}\Big) - \Phi\Big(\frac{a - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X)}}\Big)$$

für große n gilt!

10.3 Ein Verkehrsbetrieb verfüge über 114 Trams, von denen an einem Tag jede unabhängig von den anderen mit 10 % Wahrscheinlichkeit ausfalle.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 99 von ihnen zur Verfügung stehen? Schätzen Sie dies sowohl über die Tschebyschow-Ungleichung als auch mit der Berry-Esseen-Abschätzung mit $c = 0,5$ ab! Benutzen Sie im letzteren Fall eine Tabelle für die Normalverteilung!

10.4 $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgrößen auf einem Typizitätsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. In der Vorlesung wurde das empirische Mittel $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ als „Maximum-Likelihood-Schätzer“ für μ bei bekanntem σ^2 eingeführt. Das heißt: Betrachtet man die gemeinsame Dichte $L_n(\mu, \sigma^2, x_1, \ldots, x_n)$ von $X_1, \ldots, X_n$ (wie lautet diese?), dann nimmt $L_n(\mu, \sigma^2, X_1, \ldots, X_n)$, als Funktion von μ bei $\mu = \overline{X}_n$ den maximalen Wert an. (Wenn man L_n wie hier nur als Funktion von μ und/oder σ^2, die Werte der Zufallsgrößen dagegen als fest betrachtet, nennt man es oft „Likelihood-Funktion“, aus deren Maximierung man Schätzer für μ und σ^2 bekommt.)

(a) μ sei unbekannt und σ^2 bekannt. Bestimmen Sie die Verteilung von $\overline{X}_n$ und geben Sie mit deren Hilfe ein „95%-Konfidenzintervall“ für μ an: Damit ist ein „zufälliges“ Intervall, in unserem Fall von der Form $[\overline{X}_n - a, \overline{X}_n + b]$ mit vom unbekannten μ unabhängigen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, gemeint, so dass auf jeden Fall

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid \mu \in [\overline{X}_n(\omega) - a, \overline{X}_n(\omega) + b]\right) \geq 0,95$$

ist, egal wie der unbekannte Wert μ lautet.

(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für σ^2 bei bekanntem μ! Ist er erwartungstreu?

(c) Wenn μ und σ^2 unbekannt sind, erscheint es naheliegend, diesen durch

$$s_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X}_k \right)^2$$

zu ersetzen, also das wahre durch das empirische Mittel zu ersetzen. Rechnen Sie nach, dass s_n^2 nicht erwartungstreu, d.h. $\mathbb{E}(s_n^2) \neq \sigma^2$ ist, und dass man, um dies zu ändern, den Vorfaktor $\frac{1}{n}$ durch $\frac{1}{n-1}$ ersetzen müsste!

10.5 Wie ist das Quadrat einer standardnormalverteilten Zufallsgröße verteilt? Geben Sie die Dichte an!