Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 9
12.12.2016

Übungen zur Stochastik

9.1 Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen: Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte (u.i.v., englisch i.i.d.) Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Dann gilt in Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}(X_1)$, und zwar ist für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \,\Big|\, \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \mathbb{E}(X_1)\Big| > \varepsilon\Big\}\Big) \le \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2 n}.$$

9.2 Wie lautet das schwache Gesetz der großen Zahlen für empirische Verteilungen

$$\rho^{(n)}(\omega, A) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_A(X_k(\omega))\,,$$

wenn man also anstelle der X_i in der vorigen Formulierung die aus ihnen gebildeten ebenfalls u.i.v. (!) Zufallsgrößen $\mathbb{1}_A(X_i)$ mit messbarem A betrachtet?

9.3 Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße!

In der Rechnung werden Sie womöglich auf eine Stelle stoßen, von der aus sich nach dem Motto „Augen zu und durch“ in naheliegender Weise weiterrechnen lässt, eine theoretische Rechtfertigung jedoch Kenntnisse in der komplexen Analysis erfordern würde. Stören Sie sich nicht daran!

9.4 Für quadratintegrierbare $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ betrachtet man anstelle ihrer Fouriertransformation meist nur die „Fourierkoeffizienten“

$$c_k := \int_0^{2\pi} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} f(y)\mathrm{d}y$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Man kann nämlich zeigen, dass $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ gilt (wobei diese „Fourierreihe“ als L^2-Grenzwert zu verstehen ist). Insbesondere ist f also eindeutig durch seine Fourierkoeffizienten bestimmt. In dieser Aufgabe geht es um den (keine Vorkenntnisse über das Erwähnte erfordernden) Spezialfall, dass f eine Einschränkung einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten stetig differenzierbaren 2π-periodischen Funktion auf das Intervall $[0, 2\pi]$ ist.

(a) Bringen Sie die n-te Partialsumme der Fourierreihe „in naheliegender Weise“ in die Form

$$f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^{2\pi} D_n(x-y) f(y)\mathrm{d}y\,!$$

Zeigen Sie, dass sich der so erhaltene „Dirichlet-Kern“ D_n auch in der Form

$$D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\pi \sin\left[\frac{x}{2}\right]}$$

darstellen lässt! Der Vorteil dieser Form ist, dass sie keine bei $n \to \infty$ unbeschränkte Summandenzahl hat.

(b) Nun wollen wir zeigen, dass f_n für $n \to \infty$ punktweise gegen f konvergiert. Machen Sie sich klar, dass dies, mathematisch nicht rigoros gesprochen, darauf hinausläuft, $\lim_{n\to\infty} D_n = \delta$ zu zeigen!

(c) Zeigen Sie, dass $f_n(x) - f(x) = \int_0^{2\pi} D_n(y)\left[f(x-y) - f(x)\right]\mathrm{d}y$ ist!

(d) Machen Sie sich klar, wie man $2\sin\frac{y}{2}$ durch y approximieren kann, wenn y klein ist und dass in diesem Fall $\frac{f(x-y)-f(x)}{2\sin\frac{y}{2}}$ nahe bei $-f'(x)$ liegt! Zeigen Sie konkret, dass

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x-y)-f(x)}{2\sin\frac{y}{2}} = -f'(x)$$

gilt, der Bruch also für $y \to 0$ beschränkt bleibt! Deshalb ist es im Weiteren vorteilhaft, den Nenner des Dirichletkerns mit der eckigen Klammer in c) zusammenzufassen.

(e) Wir teilen nun das Integral in c) gemäß $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi}$ auf. Zeigen Sie, dass $\int_0^{\varepsilon} \ldots \leq C\varepsilon$ mit einer von n unabhängigen Konstante C ist! Für $\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \ldots$ geht das natürlich genauso.

(f) Zeigen Sie, dass $\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \ldots \leq \frac{C_\varepsilon}{n+1}$ mit einer nur von ε abhängigen Zahl $C_\varepsilon > 0$ ist! Integrieren Sie dazu, ähnlich wie in der Vorlesung, partiell, wobei Sie von $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$ die Stammfunktion bilden!

(g) Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ist! (Wenn Sie in den vorigen Rechnungen genauer achtgeben, sehen Sie, dass die Konvergenz gleichmäßig in x ist.)