Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 8
5.12.2016

Übungen zur Stochastik

8.1 Sei $\Omega := \{\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} : \omega_k \in \{0,1\}\}$ die Menge der 0-1-Folgen und $\mathfrak{Z}$ die Menge der Zylindermengen auf Ω. Zur Erinnerung: Zylindermengen sind Mengen der Form

$$Z_{k_1,\ldots,k_n}^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} = \{\omega \in \Omega : \, \omega_{k_1} = \delta_1, \ldots, \, \omega_{k_n} = \delta_n\},$$

wobei $\delta_i \in \{0,1\}$, alle $k_i \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Hier wird der Wert an n Stellen fest vorgegeben, die restlichen Stellen sind beliebig.
$\mathfrak{Z}$ ist selbst keine σ-Algebra (warum?), daher betrachten wir die von $\mathfrak{Z}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}_\infty := \sigma(\mathfrak{Z})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen bezüglich $\mathfrak{B}_\infty$ messbar, d.h. dort enthalten sind! Berechnen Sie ggf. ihr (Produkt-/Bernoulli-) Maß!

(a) $A_1 := \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq \omega_2\}$, d.h. die Menge der Folgen, deren erste zwei Folgenglieder verschieden sind.

(b) $A_2 := \{\omega \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N} \; \forall j \geq k : \omega_j = 0\}$, d.h. die Menge aller Folgen, die schließlich 0 sind.

(c) $A_3 := \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N} \; \exists j \geq k : \omega_j = 0\}$, d.h. die Menge aller Folgen, die unendlich oft 0 enthalten.

8.2 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen (Vergröberungen). Die Varianz einer Zufallsvariablen X, für die $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ gilt, ist definiert als $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

gilt!

8.3 (a) Man zeige für eine Zufallsgröße X mit Werten in $\mathbb{N}_0$, dass

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

ist! (Was bedeutet die formale Schreibweise $\mathbb{P}(X \geq n)$?)

(b) Man zeige für eine Zufallsgröße $X \geq 0$, dass

$$\mathbb{E}(X) = \int \mathbb{P}(X > a) da$$

gilt!
Hinweis: Man darf etwaige Integrationsreihenfolgen vertauschen.

8.4 *Randverteilungen*

(a) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$. Berechnen Sie die Randverteilungen $f_X(x)$ und $f_Y(x)$!

(b) Sei

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$$

und

$$g_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})}(x,y) + 2\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]}(x,y)\,.$$

Berechnen Sie die jeweiligen Randverteilungen! Was zeigt uns dieses Beispiel?

(c) Es seien X und Y unabhängige reelle Zufallsgrößen deren Dichten ρ_X und ρ_Y gegeben sind durch $\rho_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ und $\rho_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$, $\alpha > 0$.
Berechnen Sie die Dichte von $X+Y$!

Erinnerung und Hinweis: „X ist stetig verteilt mit Dichte ρ“ bedeutet

$$F_X(a) := \mathbb{P}(X \leq a) := \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) \leq a\}) = \mathbb{P}_X((-\infty,a]) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx\,.$$

Wenn Sie mit Fouriertransformation vertraut sind, benutzen Sie diese, wenn nicht, dann die Variablentransformation, wie in der Vorlesung besprochen.