MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Detlef Dürr

Wintersemester 2016/17
Blatt 6
22.11.16

Übungen zur Stochastik

Für die empirische Verteilung von Kopf und Zahl in einer durch Rademacherfunktionen r_k modellierten Münzwurfreihe ist

$$\rho_{emp}^{(n)}(\{1\}, x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1\}}(r_k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\,,$$

mit der Abkürzung $\overline{r}_n(x) := r_n(x) - \frac{1}{2}$ also

$$\rho_{emp}^{(n)}(\{1\}, x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)\,.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\forall \epsilon > 0 : \lambda\left(\left\{x : \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k(x)\right| > \epsilon\right\}\right) < \frac{1}{4\epsilon^2 n} \overset{n \text{ groß}}{\approx} 0$$

gilt. Gemäß dem Wörterbuch besagt dies: Typischerweise zeigt eine Münzwurffolge der Länge n eine relative Häufigkeit von $\frac{1}{2}$ Kopf. Eine derartige Aussage heißt „schwaches" Gesetz der großen Zahlen. Im Gegensatz dazu ist

$$\lambda(\{x : |\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k(x)| = 0\}) = 1.$$

eine Version des „starken" Gesetzes der großen Zahlen.

6.1 Man nennt eine Folge von Vergröberungen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 1]$ stark konvergent gegen null, wenn

$$\lambda(\{x : \lim_n f_n(x) = 0\}) = 1$$

ist, und schwach konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_n \lambda(x : |f_n(x)| < \epsilon) = 1$$

gilt. Starke Konvergenz impliziert schwache und ein Schritt im Beweis ist folgende Gleichheit, die Sie zeigen sollen:

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=l}^{\infty}\{x : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k(x)| < \epsilon\} = \{x : \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k(x)| < \epsilon\}$$

Geben Sie zunächst in Worten an, welche Elemente die Menge auf der linken Seite des „=" hat!

6.2 Die umgekehrte Richtung gilt nicht. Zeigen Sie dies anhand der auf $[0, 1]$ definierten Vergröberungen $X_n : [0, 1] \to \{0, 1\}$ mit

$$X_n := \mathbb{1}_{[i/2^m,(i+1)/2^m]}, \quad n = 2^m + i, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad i \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}\,!$$

6.3 Arbeiten Sie folgenden Teilschritt des Beweises des starken Gesetzes der großen Zahlen aus:

$$\exists C < \infty \quad \forall l \in \mathbb{N} : \quad \int_0^1 \sum_{n=1}^{l} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k(x)|^4 dx < C$$