

Übungen zur Stochastik

1.1 Seien A, B Teilmengen von Ω und \bar{A}, \bar{B} ihre Komplemente in Ω . Weiter sei I eine Indexmenge. Man begründe graphisch und rechnerisch:

- (a) $\bar{\bar{A}} = A$ und $\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow A = B$.
- (b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (de Morgansche Regeln) und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (c) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, wobei $A \setminus B := A \cap \bar{B}$.
- (d) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$, sowie $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$, wobei $\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \mid \omega \in A_i \text{ für wenigstens ein } i\}$ und $\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \mid \omega \in A_i \text{ für alle } i\}$.

1.2 Sei Ω eine endliche Menge. Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ und $|A|$ die Anzahl der Elemente in der Menge A .

- (a) Man zeige graphisch und rechnerisch: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
- (b) Ebenso: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
- (c) Die allgemeine Formel lautet (wie würde man das beweisen?)

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_k > i_{k-1} > \dots > i_1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Nun sei Ω die Menge aller Permutationen von $(1, 2, \dots, n)$. Wieviele Permutationen gibt es, die an mindestens einer Stelle die Zahl unverändert lassen? Sei A_j die Menge der Permutationen in denen j unverändert ist. Man berechne die Mächtigkeit der Menge $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$! *Hinweis:* Wieviele Summanden werden in $\sum_{i_k > i_{k-1} > \dots > i_1}$ summiert? Da hilft der Binomialkoeffizient weiter.

- (d) Wenn man obige Mächtigkeit durch die von Ω dividiert, bekommt man die Laplace-Wahrscheinlichkeit w . Was besagt obige Rechnung in der Sprache von Ereignissen und Laplace-Wahrscheinlichkeit?
- (e) 4 Herren, die jeder einen Hut tragen, treffen sich zu einer Stammtischrunde, doch als sie das Lokal wieder verlassen, greift jeder blind einen der Hüte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer den richtigen (nämlich seinen eigenen) Hut ergriffen hat?

1.3 Eine Münze wird 10-mal geworfen.

- (a) Geben Sie die Menge A an, die das Ereignis „im 3. Wurf Kopf“ beschreibt, sowie $W(A)$!
- (b) Dasselbe für „zum ersten Mal Kopf im 3. Wurf“.

1.4 Eine Münze wird n -mal geworfen. Bestimmen Sie $p_n := W(\text{Zahl der Köpfe ist ungerade})$ für $n = 3$ und $n = 4$ als Zahl der günstigen durch Zahl der möglichen Fälle! Zeigen Sie außerdem, dass alle p_n gleich sind, indem Sie p_n aus p_{n-1} berechnen!

Hinweis: Denken Sie daran, dass eine elektronische Anmeldung zu den Übungen erforderlich ist, siehe <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~hinrichs>.