

# Billards im Quadrat

Sebastian Hensel

## Ein anschauliches Problem

Angenommen, man stößt einen Billardball an und verfolgt seine Bahn – was geschieht? In der Wirklichkeit würde der Ball vielleicht einige Male an der Bande abprallen, und dann irgendwo auf dem Tisch zum Stillstand kommen. Aber was würde passieren, wenn wir auf einem mathematisch idealisierten Billardtisch spielen? Würde der Ball jemals genau zu seiner Ausgangsposition zurück kehren? Könnte seine Bahn jede Region auf dem Tisch erreichen wenn wir nur lange genug warten?

In diesem Artikel<sup>1</sup> werden wir solche anschaulichen Frage in präzise mathematische Probleme umformulieren, und dabei Verbindungen zwischen dem *dynamischen* Verhalten des sich bewegenden Billardballs, *geometrischen* Eigenschaften der Bahn des Balls, und *arithmetischen* Eigenschaften des Anstoßwinkels entdecken.

## Billards als dynamisches System

Wir modellieren unseren Billardtisch als ein Polygon  $T$  in der Ebene. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass  $T$  ein Quadrat ist, da in diesem Fall die Resultate eine besonders einfache Form annehmen. Die diskutierten Sätze funktionieren aber ganz ähnlich für eine große Klasse von Tischen, wie wir am Ende kurz besprechen.

Die Bahn unseres Billardballs soll drei Regeln folgen:

- Solange der Ball sich im Inneren des Polygons  $T$  befindet, bewegt er sich

auf einem Geradensegment. Dabei bleibt Laufgeschwindigkeit und Richtung konstant.

- Wenn der Ball die Bande trifft, prallt er inelastisch ab; insbesondere ist der Ein- und Ausgangswinkel der selbe und der Betrag seiner Geschwindigkeit ändert sich nicht.
- Wenn der Ball eine der Ecken von  $T$  trifft, endet die Bahn.

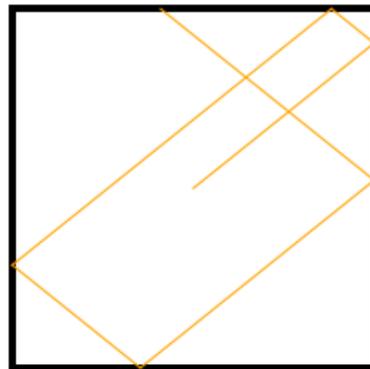


Abbildung 1: Ein Stück einer von einem Billardball abgefahrenen Bahn

Angenommen wir geben eine Ausgangsposition  $p \in T$  und einen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  vor. Es ist klar, dass es genau eine Billardbahn mit diesen Anfangsdaten gibt, die den drei Regeln oben genügt. Mit anderen Worten, es gibt eine Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow T$ , sodass  $f(t)$  die Position des Balls zum Zeitpunkt  $t$  ist. Man könnte versuchen, diese Funktion explizit zu beschreiben (mit Hilfe von elementarer Geometrie und Fallunterscheidungen), aber diese Beschreibung wäre recht kompliziert und unhandlich.

Wir wählen stattdessen einen leicht anderen Ansatz, und beschreiben anstatt der

<sup>1</sup>Dieser Text ist eine Adaptation des Vortrags "Billards in Polygonen", den der Autor im Rahmen des Programms "Mathematik am Samstag" am 8.12.2018 gehalten hat.

Bewegung des Balls direkt die Bahn als ganzes. Dazu dient die folgende Definition.

**Definition.** Sei  $T$  ein Polygon in der Ebene, dessen Rand  $\partial T$  aus Geradensegmenten  $S_1, \dots, S_k$  besteht. Eine *Billardbahn* ist eine Folge  $L_1, L_2, \dots$  von Geradensegmenten in  $T$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes  $L_i$  liegt auf dem Rand  $\partial T$  des Tisches,
- für jedes  $i \geq 1$  ist der Endpunkt von  $L_i$  der Anfangspunkt von  $L_{i+1}$ , und
- liegt dieser Punkt auf der Seite  $S_j$  von  $T$ , so gilt für die Winkel

$$\angle(L_i, S_j) = \angle(S_j, L_{i+1}),$$

- oder dieser Punkt ist eine Ecke von  $T$ , und die Bahn endet.

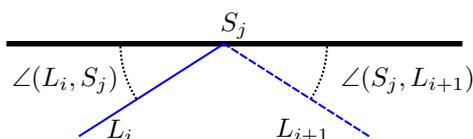


Abbildung 2: Die induktive Regel aus der Billardbahnen entstehen.

Es ist leicht einzusehen (und auch leicht mithilfe vollständiger Induktion zu zeigen), dass solche Billardbahnen eindeutig durch ihr *erstes* Segment  $L_1$  bestimmt sind, und für jede Wahl eines solchen Segments existieren. Es ist auch klar, dass diese Bahnen genau dem Weg entsprechen, den ein Billardball abfährt, wenn er unseren drei Regeln im letzten Abschnitt folgt.

### Einige Fragen

Jetzt wo wir Billardbahnen formalisiert haben, können wir auch die intuitiven Fragen vom Beginn formaler machen, nämlich:

- Gibt es *periodische* Billardbahnen, d.h. Bahnen  $L_1, \dots, L_k, \dots$  sodass  $L_{k+n} = L_k$  für alle  $k$  und ein geeignetes  $n$  gilt? Welche Perioden  $n$  kommen vor?
- Gibt es Billardbahnen, sodass der Anfangspunkt von  $L_1$  der Mittelpunkt von  $T$  ist, aber dieser Mittelpunkt auf keinem anderen Segment  $L_i$  der Bahn liegt?

Man sieht schnell, dass es im Quadrat periodische Billardbahnen gibt (z.B. wenn man den Ball orthogonal auf eine der Banden prallen lässt), aber die Existenz nichtperiodischer Bahnen scheint deutlich subtiler.

### Von Dynamik zu Geometrie

Um die Existenz nichtperiodischer Bahnen zu klären, werden wir die dynamische Billardbahn in ein statisches geometrisches Objekt verwandeln. Konzentrieren wir uns dazu für den Moment auf ein einziges Abprallen des Balls von der Bande. Wir haben also ein Segment  $S$  im Rand unseres Tisches  $T$ , und zwei aufeinanderfolgende Bahnsegmente  $L, L'$  die sich in einem Punkt auf  $S$  schneiden. Anstatt jetzt den Ball an der Bande abprallen zu lassen, spiegeln wir den Tisch (und den Rest der Bahn) an der Bande. Das folgende Lemma beschreibt, was dann passiert.

**Lemma 1.** Sei  $L_1, L_2, \dots$  eine Billardbahn in dem Polygon  $T$ , und sei  $S$  die Seite von  $T$  auf der  $L_1$  endet. Bezeichne mit  $\pi$  die Spiegelung der Ebene an der Gerade durch  $S$ . Dann gilt:

1.  $L_1$  und  $\pi(L_2)$  sind Teil einer gemeinsamen Geraden.
2.  $\pi(L_2), \pi(L_3), \dots$  ist eine Billardbahn im Polygon  $\pi(T)$ .

*Beweis.* Der Satz vom Gegenwinkel zeigt, dass der Winkel zwischen  $L_1$  und  $\pi(L_2)$  genau 180 Grad sind (vergleiche Abbildung 3). Daher liegen sie auf einer Geraden, und Punkt 1 ist gezeigt.

Für Punkt 2 reicht es zu bemerken dass Spiegelungen Winkel erhalten:  $\angle(\pi(L_i), \pi(S_j)) = \angle(L_i, S_j)$ . Somit genügt die Folge  $\pi(L_2), \pi(L_3), \dots$  den Bedingungen an eine Billardbahn, da  $L_2, L_3, \dots$  es tut.  $\square$

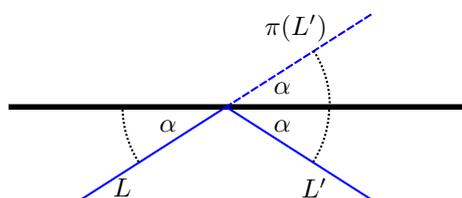


Abbildung 3: *Gespiegelte Billardbahnen ergeben Geraden.*

Man kann dieses Lemma jetzt induktiv anwenden, um jedes Abprallen durch eine Spiegelung zu ersetzen. Sei also  $L_1, \dots$  eine Billardbahn in einem Quadrat  $Q_1$ . Wir definieren die *Abwicklung*  $A_1, \dots$  induktiv auf die folgende Weise. Das erste Segment der Abwicklung stimmt mit dem ersten Segment der Bahn überein:  $A_1 = L_1$ . Sei ferner  $S_1$  die Seite von  $Q_1$  auf der  $L_1$  endet, und bezeichne mit  $\pi_1$  die Spiegelung an der Gerade durch  $S_1$ . Betrachte die Folge  $L'_1 = \pi_1(L_2), L'_2 = \pi_1(L_3), \dots$  von Geradensegmenten. Nach Teil 2. von Lemma 1 ist  $L'_1, L'_2, \dots$  eine Billardbahn in  $Q_2 = \pi_1(Q_1)$ . Jetzt wenden wir dieselbe Konstruktion auf diese Billardbahn an: setze  $A_2 = L'_1$ , finde die Seite  $S_2$  von  $Q_2$  auf der  $L'_1$  endet, und betrachte die Spiegelung  $\pi_2$  an der Gerade durch  $S_2$ . Setze  $Q_3 = \pi_2(Q_2)$ , und  $L''_1 = \pi_2(L'_2), L''_2 = \pi_2(L'_3), \dots$ . Dies ist eine Billardbahn in  $Q_3$ , und wir können den Prozess wiederholen und so weiter um die Abwicklung

$A_1, A_2, \dots$  zu definieren. In Abbildung 4 sind die ersten Schritte einer Abwicklung der Bahn aus Abbildung 1 dargestellt.

Mithilfe vollständiger Induktion und Teil 1. von Lemma 1 sieht man dass alle  $A_i$  Teil eines Geradenstrahls  $g$  sind, den wir die *Abwickelgerade* der Bahn nennen. Mit anderen Worten: anstatt den Ball an der Bande abprallen zu lassen, können wir den Tisch an der Bande spiegeln, und den Ball auf der Abwickelgerade weiterlaufen lassen.

Vorteil dieser neuen Sichtweise ist, dass sich die Laufrichtung des Balls nie ändert, also durch ein statisches geometrisches Objekt (eine Gerade) beschreiben lässt. Wirklich nützlich wird diese Sichtweise aber dadurch, dass man Eigenschaften der Billardbahn von der Abwickelgerade ablesen kann und umgekehrt.

Sei dazu  $\Gamma$  ein reguläres quadratisches Gitter in der Ebene, das unseren Tisch  $T$  als eines der Gitterquadrate enthält. Man sieht leicht ein, dass eine Spiegelung an einer beliebigen Seite eines der Quadrate in  $\Gamma$  das gesamte Gitter  $\Gamma$  in sich selbst abbildet. Weiterhin bildet eine solche Spiegelung Eckpunkte der Quadrate in  $\Gamma$  auf Eckpunkte, und Mittelpunkte der Quadrate auf Mittelpunkte ab.

Mithilfe dieser Beobachtungen können wir jetzt zunächst klären, wann Billardbahnen in den Ecken von  $T$  enden.

**Lemma 2.** Angenommen  $L_1, L_2, \dots$  ist eine Billardbahn, die im Mittelpunkt von  $Q$  beginnt. Dann endet die Billardbahn in einer Ecke von  $T$  genau dann, wenn die entsprechende Abwickelgerade  $g$  der Bahn einen Eckpunkt des Gitters  $\Gamma$  enthält.

*Beweis.* Nehmen wir zunächst an, dass die Billardbahn in einer Ecke endet. Es gibt also ein  $n$ , sodass  $L_n$  ein Segment ist, dessen Endpunkt eine Ecke von  $T$

ist. Nun folgen wir der Konstruktion der Abwicklung. Der erste mögliche Fall ist, dass schon  $L_1$  in einer Ecke von  $Q$  endet. In diesem Fall tut dies auch die Abwickelgerade, denn das erste Bahnsegment ist Teil der Abwickelgerade. Im zweiten Fall tut  $L_1$  dies nicht, und wir folgen der induktiven Konstruktion. Das heißt, wir betrachten die Spiegelung  $\pi$  an der Seite  $S$  von  $T$  betrachtet auf der  $L_1$  endet, und konstruieren die Billardbahn  $L'_1 = \pi(L_2), L'_2 = \pi(L_3), \dots$ . Da  $\pi$  Eckpunkte in  $\Gamma$  auf Eckpunkte in  $\Gamma$  schickt, folgt also, dass  $L'_{n-1}$  in einem Eckpunkt des Quadrats  $\pi(Q)$  endet. Wir bemerken, dass die Billardbahn  $L'_1, L'_2, \dots$  die Ecke aber einen Schritt früher als  $L_1, L_2, \dots$  erreicht. Nach endlich vielen Schritten sind wir also im ersten Fall, und finden, dass eine Ecke von  $\Gamma$  Teil der Abwickelgerade ist.

Die umgekehrte Richtung geht ganz ähnlich, nur "rückwärts": wenn die Abwickelgerade  $g$  durch eine Ecke läuft, dann gilt dies auch für eine der gespiegelten Billardbahnen die in der Konstruktion von  $g$  vorkommen. Indem wir diese Bahn jetzt zurück spiegeln stellen wir fest dass auch die vorige durch eine Ecke gelaufen ist. Wieder schließen wir nach endlich vielen Schritten, dass dies auch für die ursprüngliche Bahn gilt.  $\square$

Ganz analog können wir jetzt auch charakterisieren, wann eine Bahn den Mittelpunkt ein weiteres Mal erreicht.

**Lemma 3.** Angenommen  $L_1, L_2, \dots$  ist eine Billardbahn, die im Mittelpunkt von  $Q$  beginnt. Dann ist der Mittelpunkt in einem weiteren Segment  $L_i, i > 1$  genau dann erhalten, die entsprechende Abwickelgerade  $g$  der Bahn einen Mittelpunkt des Gitters  $\Gamma$  enthält.

Es ist eine gute Übung für interessierte Le-

ser sich zu überlegen wie man anhand der Abwickelgerade feststellen kann, ob ein anderer Punkt in  $Q$  von der Billardbahn erreicht wird.

### Von Geometrie zu Arithmetik

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass man die die Frage ob die (geometrisch komplizierte) Billardbahn zum in einer Ecke landet oder zum Mittelpunkt des Tisches zurück kehrt, mithilfe der (geometrisch deutlich einfacheren) Abwickelgerade völlig klären kann. Die entsprechenden Eigenschaften der Abwickelgeraden lassen sich aber leicht in Bedingungen an den Anstoßwinkel übersetzen.

**Lemma 4.** Sei  $g$  ein Geradenstrahl, der im Mittelpunkt eines Quadrats von  $\Gamma$  beginnt. Dann enthält  $g$  einen weiteren Mittelpunkt des Gitters  $\Gamma$  genau dann wenn die Steigung von  $g$  rational ist, also ein Bruch  $\frac{n}{m}$  mit ganzzahligen  $n, m$ .

Die Gerade  $g$  enthält einen Eckpunkt von  $\Gamma$  genau dann wenn die Steigung ein Bruch der Form  $\frac{2n+1}{2m+1}$  ist.

*Beweis.* Angenommen, der Mittelpunkt von  $Q$  ist der Punkt mit Koordinaten  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Da das Gitter aus Einheitsquadraten besteht, hat also jeder Mittelpunkt eines Gitterquadrates die Koordinaten

$$\left( \frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} + n \right)$$

für ganzzahlige  $n, m$ . Eine Gerade durch  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  enthält einen solchen Punkt aber genau dann, wenn ihre Steigung  $\frac{n}{m}$  ist. Dies zeigt die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt, da eine solche Gerade der Punkte  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und  $(n, m)$  verbindet.  $\square$

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel, um geschlossene Billardbahnen vollständig zu

charakterisieren.

**Satz.** Sei  $L_1, L_2, \dots$  eine Billardbahn, die im Mittelpunkt des Quadrats beginnt. Dann endet diese in einer Ecke genau dann wenn das erste Segment  $L_1$  rationale Steigung hat, deren Zähler und Nenner beide ungerade sind. Ist die Steigung rational, aber nicht von dieser Form, dann ist die Bahn periodisch und kehrt zum Mittelpunkt des Quadrats zurück.

*Proof.* Sei  $g$  die Abwickelgerade der Billardbahn  $L_1, L_2, \dots$ . Lemma 2 impliziert, dass die Bahn genau dann in einer Ecke des Tisches endet, wenn  $g$  rationale Steigung mit ungeradem Zähler und Nenner hat. Aus der induktiven Konstruktion von  $g$  sieht man direkt, dass die Steigung von  $g$  mit der Steigung von  $L_1$  übereinstimmt. Dies zeigt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt genauso, mit Lemma 3 anstatt 2.  $\square$

Da es Zahlen gibt, die nicht rational sind – zum Beispiel  $\sqrt{2}$  – folgt aus dem Satz insbesondere die Existenz von Billardbahnen, die sich nie schließen und nie in einer Ecke enden.

Es ist eine schöne Übung, aus der Steigung von  $L_1$  auszurechnen, wie oft der Ball an der Bande abprallt, bevor er in einer Ecke landet, oder zum Mittelpunkt zurück kehrt (Als Tip: der Ball prallt an einer Bande ab, genau wenn die Abwickelgerade eine Gerade im Gitter  $\Gamma$  kreuzt). Damit kann man auch klären, welche Perioden von Billardbahnen möglich sind.

### Mehr über nichtperiodische Bahnen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass es Billardbahnen gibt, die unendlich sind (also nie in einer Ecke landen), aber dennoch nicht periodisch (also nie zum

Mittelpunkt zurück kehren). Es ist eine natürliche Frage, wie sich solche Bahnen langfristig verhalten. Der folgende Satz gibt eine Antwort darauf.

**Satz.** Eine unendliche, nicht-periodische Billardbahn im Quadrat ist *dicht*: sie kommt irgendwann jedem Punkt des Quadrats beliebig nahe.

Ein Beweis dieses Satzes ist etwas zu kompliziert für den Rahmen dieses Artikels, aber in Abbildung 5 sind die ersten 500 Segmente einer Bahn mit Steigung  $\sqrt{2}$  dargestellt. Es wird sichtbar, dass die Bahn den Tisch mehr und mehr ausfüllt.

### Andere Tische, und offene Fragen

Man kann versuchen, unsere Untersuchung auf nicht-quadratische Tische auszudehnen. Für manche Polygone klappt das gut (beispielsweise Rechtecke oder gleichseitige Dreiecke). Im Allgemeinen sind diese Fragen aber sehr schwierig. So ist beispielsweise noch nicht einmal bekannt, ob in jedem Dreieck eine periodische Bahn existiert. Es kann auch sein, dass es unendliche, nicht-periodische Bahnen gibt, die nicht dicht sind. Selbst auf "angenehmen" Tischen führt das systematische Studium von Billardbahnen den Interessierten aber bald auch zur Geometrie flacher Flächen und der Dynamik des Teichmüllerflusses – und dies alles zu erklären, würde den Rahmen dieses Artikels dann doch gewaltig überschreiten...

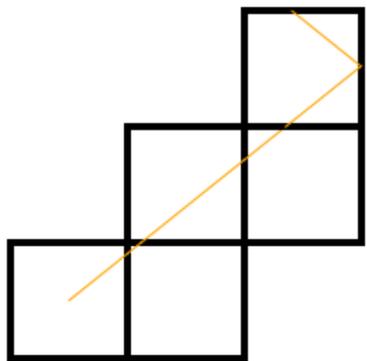
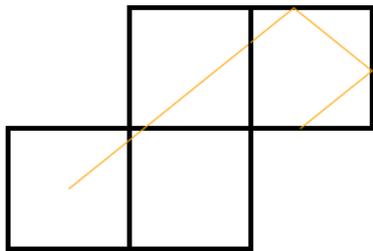
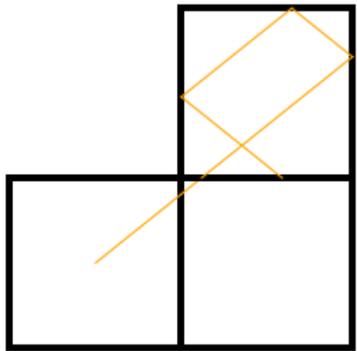
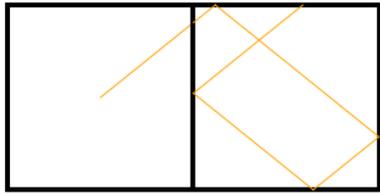


Abbildung 4: Die Abwicklung einer Billardbahn.

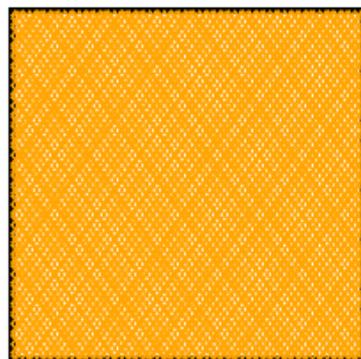
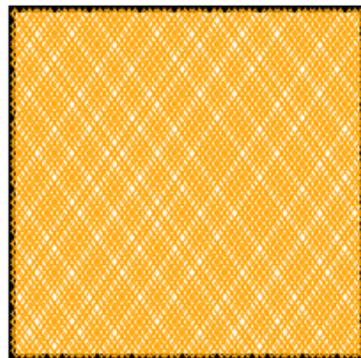
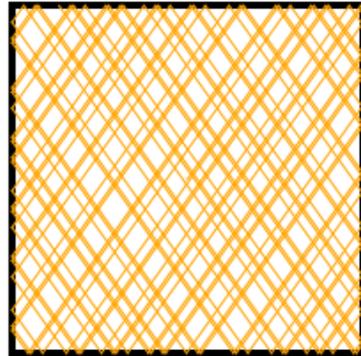


Abbildung 5: Die ersten 100, 300 und 500 Segmente einer Billardbahn mit Steigung  $\sqrt{2}$ .