Billiards in Polygonen

Prof. Sebastian Hensel

Mathematik am Samstag

8. Dezember 2018

“Reine” Mathematik?

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.
- Suche nach *Beweisen* von Vermutungen.

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.
- Suche nach *Beweisen* von Vermutungen.
- (Manchmal muss man dabei ein bisschen rechnen)

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.
- Suche nach *Beweisen* von Vermutungen.
- (Manchmal muss man dabei ein bisschen rechnen)

Heute demonstrieren wir das an folgendem Beispiel:

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.
- Suche nach *Beweisen* von Vermutungen.
- (Manchmal muss man dabei ein bisschen rechnen)

Heute demonstrieren wir das an folgendem Beispiel:

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird

“Reine” Mathematik?

Worum geht es überhaupt in reiner Mathematik?

- Suche nach *Struktur* in (scheinbar) komplizierten Systemen.
- Suche nach *Verbindungen* zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten.
- Suche nach *Beweisen* von Vermutungen.
- (Manchmal muss man dabei ein bisschen rechnen)

Heute demonstrieren wir das an folgendem Beispiel:

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Billiards, "physikalisch"

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Billiards, "physikalisch"

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Unser *Billiardtisch* ist ein Quadrat, und ist idealisiert: perfekt glatt, keine Reibung...

Billiards, "physikalisch"

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Unser *Billiardtisch* ist ein Quadrat, und ist idealisiert: perfekt glatt, keine Reibung...

Regeln für den (idealisierten) Billiardball:

Billiards, "physikalisch"

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Unser *Billiardtisch* ist ein Quadrat, und ist idealisiert: perfekt glatt, keine Reibung...

Regeln für den (idealisierten) Billiardball:

- Bis der Ball die Bande berührt, bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Bahn fort.

Billiards, "physikalisch"

Frage

Was passiert mit einem Billiardball, nachdem er angestoßen wird, wenn man unendlich lange wartet?

Unser *Billiardtisch* ist ein Quadrat, und ist idealisiert: perfekt glatt, keine Reibung...

Regeln für den (idealisierten) Billiardball:

- Bis der Ball die Bande berührt, bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Bahn fort.
- Wenn der Ball die Bande berührt, prallt er (elastisch) ab; der Eingangswinkel ist identisch mit dem Ausgangswinkel.

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt und vorher genau 23 mal abprallt?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt und vorher genau k mal abprallt?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt und vorher genau k mal abprallt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt und vorher genau k mal abprallt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball jede Region auf dem Tisch erreicht?

Fragen

Wie verhält sich ein Ball langfristig?

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt und vorher genau k mal abprallt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball jede Region auf dem Tisch erreicht?

Frage

Welchen Einfluss hat die Form des Tisches?

Fragen, philosophisch

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt?

Fragen, philosophisch

Frage

Angenommen, der Ball wird vom Mittelpunkt des Tischs in eine Richtung v angestoßen. Kehrt er dann zum Mittelpunkt zurück?

Fragen, philosophisch

Frage

Angenommen, der Ball wird vom Mittelpunkt des Tischs in eine Richtung v angestoßen. Kehrt er dann zum Mittelpunkt zurück?

Wenn die Antwort *ja* ist, kann ein "Experiment" am Computer das zertifizieren.

Fragen, philosophisch

Frage

Angenommen, der Ball wird vom Mittelpunkt des Tischs in eine Richtung v angestoßen. Kehrt er dann nach höchstens k Stößen zum Mittelpunkt zurück?

Wenn die Antwort *ja* ist, kann ein “Experiment” am Computer das zertifizieren.

Fragen, philosophisch

Frage

Angenommen, der Ball wird vom Mittelpunkt des Tischs in eine Richtung v angestoßen. Kehrt er dann nach höchstens k Stößen zum Mittelpunkt zurück?

Wenn die Antwort *ja* ist, kann ein "Experiment" am Computer das zertifizieren.

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Fragen, philosophisch

Frage

Angenommen, der Ball wird vom Mittelpunkt des Tischs in eine Richtung v angestoßen. Kehrt er dann nach höchstens k Stößen zum Mittelpunkt zurück?

Wenn die Antwort *ja* ist, kann ein "Experiment" am Computer das zertifizieren.

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Wenn die Antwort *ja* ist, kann ein Computer dies *nie* zertifizieren!

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes L_i liegt auf dem Rand ∂P

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes L_i liegt auf dem Rand ∂P,
- für jedes i, ist der Endpunkt von L_i der Anfangspunkt von L_{i+1}

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes L_i liegt auf dem Rand ∂P,
- für jedes i, ist der Endpunkt von L_i der Anfangspunkt von L_{i+1}, und
- ist q_i der Endpunkt von L_i auf S_j (und damit der Anfangspunkt von L_{i+1}), dann gilt

$$\angle_{q_i}(L_i, S_j) = \angle_{q_i}(S_j, L_{i+1}),$$

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes L_i liegt auf dem Rand ∂P,
- für jedes i, ist der Endpunkt von L_i der Anfangspunkt von L_{i+1}, und
- ist q_i der Endpunkt von L_i auf S_j (und damit der Anfangspunkt von L_{i+1}), dann gilt
$$\angle_{q_i}(L_i, S_j) = \angle_{q_i}(S_j, L_{i+1}),$$
- oder q_i ist eine Ecke von P, und die Bahn endet.

Solche Bahnen sind eindeutig bestimmt durch ihr *erstes* Segment L_1

Billiards, mathematisch

Wir beschreiben den *Billiardtisch* als ein eingebettes Polygon P in der Ebene. Insbesondere besteht der Rand $\partial P = \{S_1, \ldots, S_k\}$ aus Geradensegmenten.

Eine *Billiardbahn* ist eine Folge $L_1, L_2, \ldots$ von Geradensegmenten in P mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Endpunkt jedes L_i liegt auf dem Rand ∂P,
- für jedes i, ist der Endpunkt von L_i der Anfangspunkt von L_{i+1}, und
- ist q_i der Endpunkt von L_i auf S_j (und damit der Anfangspunkt von L_{i+1}), dann gilt
$$\angle_{q_i}(L_i, S_j) = \angle_{q_i}(S_j, L_{i+1}),$$
- oder q_i ist eine Ecke von P, und die Bahn endet.

Solche Bahnen sind eindeutig bestimmt durch ihr *erstes* Segment L_1 und existieren für jede Wahl eines solchen Segments.

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,
- *spiegele den Tisch*!

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,
- *spiegele den Tisch*!

(warum das eine gute Idee ist, wird bald klar)

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,
- *spiegele den Tisch*!

(warum das eine gute Idee ist, wird bald klar)

Beobachtung

Betrachte das quadratische Gitter Γ *in der Ebene.*

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,
- *spiegele den Tisch*!

(warum das eine gute Idee ist, wird bald klar)

Beobachtung

Betrachte das quadratische Gitter Γ in der Ebene.

- *Jedes Quadrat im Gitter entsteht aus dem Einheitsquadrat durch eine Folge von Spiegelungen am Rand.*

Von Dynamik zu Geometrie: Setup

Unser Ziel ist, die Dynamik von Billiardpfaden in ein einfacheres geometrisches Problem zu übersetzen.

Zentrale Idee:

- anstatt den Ball abprallen zu lassen,
- *spiegele den Tisch*!

(warum das eine gute Idee ist, wird bald klar)

Beobachtung

Betrachte das quadratische Gitter Γ *in der Ebene.*

- *Jedes Quadrat im Gitter entsteht aus dem Einheitsquadrat durch eine Folge von Spiegelungen am Rand.*
- *Jedes Quadrat, das aus dem Einheitsquadrat durch eine Folge von Spiegelungen am Rand entsteht, ist ein Quadrat des Gitters.*

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat.

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat.
Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat.
Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

- folge entlang der Bahn,

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat. Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

- folge entlang der Bahn,
- jedesmal wenn man eine Seite eines der Quadrate im Gitter trifft, spiegele *den gesamten Rest der Bahn* entlang dieser Seite.

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat. Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

- folge entlang der Bahn,
- jedesmal wenn man eine Seite eines der Quadrate im Gitter trifft, spiegele *den gesamten Rest der Bahn* entlang dieser Seite.
- wiederhole dies, bis man am Ende der Bahn ankommt.

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat. Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

- folge entlang der Bahn,
- jedesmal wenn man eine Seite eines der Quadrate im Gitter trifft, spiegele *den gesamten Rest der Bahn* entlang dieser Seite.
- wiederhole dies, bis man am Ende der Bahn ankommt.

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl.

Von Dynamik zu Geometrie: Abwickeln

Angenommen, wir haben eine Billiardbahn im Einheitsquadrat. Definiere die *Abwicklung* dieses Pfads auf die folgende Weise:

- folge entlang der Bahn,
- jedesmal wenn man eine Seite eines der Quadrate im Gitter trifft, spiegele *den gesamten Rest der Bahn* entlang dieser Seite.
- wiederhole dies, bis man am Ende der Bahn ankommt.

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung einer Billiardbahn.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \ldots$

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_1) = Q_2$ ist

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_1) = Q_2$ ist, denn σ erhält Winkel!

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Beginne mit $G_1 = L_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_1) = Q_2$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L'_1 = \sigma(L_2), L'_2 = \sigma(L_3), \ldots$ in Q_2.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L'_i im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L'_1$
- L_1 endet auf einer Seite S des Quadrats $Q = Q_1$.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_1) = Q_2$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L'_1 = \sigma(L_2), L'_2 = \sigma(L_3), \ldots$ in Q_2.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L_i' im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L_1'$
- L_1' endet einer Seite S des Quadrats Q_2.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2), \sigma(L_3), \dots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_1) = Q_2$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L_1' = \sigma(L_2), L_2' = \sigma(L_3), \dots$ in Q_2.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L'_i im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L'_1$
- L'_1 endet einer Seite S des Quadrats Q_2.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L'_2), \sigma(L'_3), \dots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_2) = Q_3$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L'_1 = \sigma(L_2), L'_2 = \sigma(L_3), \dots$ in Q_2.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L'_i im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L'_1$
- L'_1 endet einer Seite S des Quadrats Q_2.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L'_2), \sigma(L'_3), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_2) = Q_3$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L''_1 = \sigma(L'_2), L''_2 = \sigma(L'_3), \ldots$ in Q_3

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L_i' im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L_1'$
- L_1' endet einer Seite S des Quadrats Q_2.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2'), \sigma(L_3'), \ldots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_2) = Q_3$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L_1'' = \sigma(L_2'), L_2'' = \sigma(L_3'), \ldots$ in Q_3

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl.

Abwickeln, formal

Angenommen, L_i ist eine Billiardbahn.

- Habe G_1, und eine Billiardbahn L_i' im Quadrat Q_2. Setze $G_2 = L_1'$
- L_1' endet einer Seite S des Quadrats Q_2.
- Sei σ die Spiegelung an der Gerade durch die Seite S.
- Betrachte $\sigma(L_2'), \sigma(L_3'), \dots$ und bemerke dass dies eine Billiardbahn in dem Quadrat $\sigma(Q_2) = Q_3$ ist, denn σ erhält Winkel!
- Starte neu mit $L_1'' = \sigma(L_2'), L_2'' = \sigma(L_3'), \dots$ in Q_3

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Beweis.

- Der Winkel zwischen L_1 und $\sigma(L_2)$ ist genau 180 Grad

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Beweis.

- Der Winkel zwischen L_1 und $\sigma(L_2)$ ist genau 180 Grad
- also liegen $G_1 = L_1$ und $G_2 = \sigma(L_2)$ auf einer gemeinsamen Geraden.

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Beweis.

- Der Winkel zwischen L_1 und $\sigma(L_2)$ ist genau 180 Grad
- also liegen $G_1 = L_1$ und $G_2 = \sigma(L_2)$ auf einer gemeinsamen Geraden.
- Dasselbe gilt in allen folgenden Schritten

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Beweis.

- Der Winkel zwischen L_1 und $\sigma(L_2)$ ist genau 180 Grad
- also liegen $G_1 = L_1$ und $G_2 = \sigma(L_2)$ auf einer gemeinsamen Geraden.
- Dasselbe gilt in allen folgenden Schritten, also liegen alle G_i auf einer Geraden.

Abwickeln, Beweis

Lemma

Die Abwicklung eines Billiardpfads ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung eines Billiardpfads.

Beweis.

- Der Winkel zwischen L_1 und $\sigma(L_2)$ ist genau 180 Grad
- also liegen $G_1 = L_1$ und $G_2 = \sigma(L_2)$ auf einer gemeinsamen Geraden.
- Dasselbe gilt in allen folgenden Schritten, also liegen alle G_i auf einer Geraden.
- Umgekehrt kann man, wenn eine Gerade gegeben ist, diese spiegeln jedesmal wenn sie den Rand von Q trifft.

$\square$

Von Dynamik zu Geometrie zu Algebra

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung einer Billiardbahn.

Von Dynamik zu Geometrie zu Algebra

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung einer Billiardbahn.

Zentrale Beobachtung:

Lemma

Eine Billiardbahn die im Mittelpunkt von Q beginnt kehrt zum Mittelpunkt von Q zurück,

Von Dynamik zu Geometrie zu Algebra

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung einer Billiardbahn.

Zentrale Beobachtung:

Lemma

Eine Billiardbahn die im Mittelpunkt von Q beginnt kehrt zum Mittelpunkt von Q zurück, genau dann wenn ihre Abwicklung die Mittelpunkte zweier Quadrate im Gitter Γ verbindet.

Von Dynamik zu Geometrie zu Algebra

Lemma

Die Abwicklung einer Billiardbahn ist ein Geradenstrahl. Umgekehrt entsteht jeder Geradenstrahl, der im Einheitsquadrat beginnt, als Abwicklung einer Billiardbahn.

Zentrale Beobachtung:

Lemma

Eine Billiardbahn die im Mittelpunkt von Q beginnt kehrt zum Mittelpunkt von Q zurück, genau dann wenn ihre Abwicklung die Mittelpunkte zweier Quadrate im Gitter Γ verbindet.

Lemma

Eine Gerade, die im Mittelpunkt eines Quadrats beginnt, trifft einen anderen Mittelpunkt genau dann wenn ihre Steigung rational, d.h ein Bruch $\frac{m}{n}$ aus ganzen Zahlen ist.

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball zu seiner Startposition genau zurückkehrt?

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück, wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Beweis.

Wir müssen nur noch den zweiten Teil einsehen.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Beweis.

Wir müssen nur noch den zweiten Teil einsehen.Sei also g ein Geradensegment mit Steigung $\frac{n}{m}$, das zwei Mittelpunkte p, q im Gitter verbindet.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Beweis.

Wir müssen nur noch den zweiten Teil einsehen.Sei also g ein Geradensegment mit Steigung $\frac{n}{m}$, das zwei Mittelpunkte p, q im Gitter verbindet.

- Das Segment g kreuzt genau m vertikale

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Beweis.

Wir müssen nur noch den zweiten Teil einsehen.Sei also g ein Geradensegment mit Steigung $\frac{n}{m}$, das zwei Mittelpunkte p, q im Gitter verbindet.

- Das Segment g kreuzt genau m vertikale, und n horizontale Geraden.

Struktur von Billiardbahnen

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.
Wenn die Steigung der gekürzte Bruch $\frac{n}{m}$ ist, dann prallt die Kugel $n + m$ mal an den Banden ab.

Beweis.

Wir müssen nur noch den zweiten Teil einsehen.Sei also g ein Geradensegment mit Steigung $\frac{n}{m}$, das zwei Mittelpunkte p, q im Gitter verbindet.

- Das Segment g kreuzt genau m vertikale, und n horizontale Geraden.
- Jedes solche Kreuzen entspricht aber genau einem Abprallen an der Bande (und umgekehrt)!

$\square$

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.

Satz

Es gibt Zahlen, die nicht rational sind.

Struktur von Billiardbahnen

Frage

Kann es sein, dass der Ball nie zu seiner Startposition zurückkehrt?

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationaler Steigung angestoßen wird.

Satz

Es gibt Zahlen, die nicht rational sind.

Korollar

Es gibt Billiardbahnen, die sich niemals schließen.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:

$$2 = \frac{n^2}{m^2}$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:

$$2m^2 = n^2$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2m^2 = n^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.
- Also ist m^2 gerade, und damit auch m.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.
- Also ist m^2 gerade, und damit auch m.
- Widerspruch!

$\square$

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Wir suchen zunächst nach *Struktur* in der Menge aller Punkte die der Ball nicht erreicht.

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Wir suchen zunächst nach *Struktur* in der Menge aller Punkte die der Ball nicht erreicht.
Hier ist ein anderes geometrisches System nützlich.

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Wir suchen zunächst nach *Struktur* in der Menge aller Punkte die der Ball nicht erreicht.

Hier ist ein anderes geometrisches System nützlich.Betrachte wieder das Gitter Γ,

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Wir suchen zunächst nach *Struktur* in der Menge aller Punkte die der Ball nicht erreicht.

Hier ist ein anderes geometrisches System nützlich. Betrachte wieder das Gitter Γ, aber diesmal einen 2×2-Block B.

Leere Gebiete 1

Frage

Kann es sein, dass der Ball eine Region auf dem Tisch nie erreicht, aber dennoch nie zu seinem Anfangspunkt zurück kehrt?

Wir suchen zunächst nach *Struktur* in der Menge aller Punkte die der Ball nicht erreicht.
Hier ist ein anderes geometrisches System nützlich.Betrachte wieder das Gitter Γ,aber diesmal einen 2×2-Block B.

- Jeder gespiegelte Billiardtisch ist eine *eindeutige verschobene* Kopie eines der Quadrate aus dem Block (ungespiegelt!)

Von Abwickelgeraden zu Pacmanfamilien

Neues System:

- Betrachte eine (Abwickel)gerade g.

Von Abwickelgeraden zu Pacmanfamilien

Neues System:

- Betrachte eine (Abwickel)gerade g.
- Wenn diese den Block B verlassen würde, verschiebe stattdessen zur gegenüberliegenden Seite (und behalte die Richtung bei)

Von Abwickelgeraden zu Pacmanfamilien

Neues System:

- Betrachte eine (Abwickel)gerade g.
- Wenn diese den Block B verlassen würde, verschiebe stattdessen zur gegenüberliegenden Seite (und behalte die Richtung bei)
- Erhalte eine *Pacmanfamilie* F paralleler Geradenstücke in B.

Von Abwickelgeraden zu Pacmanfamilien

Neues System:

- Betrachte eine (Abwickel)gerade g.
- Wenn diese den Block B verlassen würde, verschiebe stattdessen zur gegenüberliegenden Seite (und behalte die Richtung bei)
- Erhalte eine *Pacmanfamilie* F paralleler Geradenstücke in B.

Lemma

Der Billiardpfad erreicht einen Punkt des Tisches genau dann, wenn F einen entsprechenden Punkt erreicht.

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

- Dann gibt es einen Streifen der Breite $2r$ der nicht von der Familie F getroffen wird.

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

- Dann gibt es einen Streifen der Breite $2r$ der nicht von der Familie F getroffen wird.
- Dieser "leere Streifen" setzt sich zu weiteren leeren Streifen über den Rand hinaus fort.

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

- Dann gibt es einen Streifen der Breite $2r$ der nicht von der Familie F getroffen wird.
- Dieser "leere Streifen" setzt sich zu weiteren leeren Streifen über den Rand hinaus fort.
- Wenn nicht alles getroffen wird, gibt es also ein "leeres Gebiet" G, das aus parallelen, gleich breiten Streifen besteht

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

- Dann gibt es einen Streifen der Breite $2r$ der nicht von der Familie F getroffen wird.
- Dieser "leere Streifen" setzt sich zu weiteren leeren Streifen über den Rand hinaus fort.
- Wenn nicht alles getroffen wird, gibt es also ein "leeres Gebiet" G, das aus parallelen, gleich breiten Streifen besteht; insbesondere also endlich vielen.

Leere Bereiche geben leere Streifen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie (eine Abwickelgerade, eine Billiardbahn) eine kleine Scheibe vom Radius r im Tisch nicht erreicht.

- Dann gibt es einen Streifen der Breite $2r$ der nicht von der Familie F getroffen wird.
- Dieser "leere Streifen" setzt sich zu weiteren leeren Streifen über den Rand hinaus fort.
- Wenn nicht alles getroffen wird, gibt es also ein "leeres Gebiet" G, das aus parallelen, gleich breiten Streifen besteht; insbesondere also endlich vielen.
- Wir können annehmen, dass G *maximal* mit dieser Eigenschaft ist (sonst vergrößere G).

Leere Streifen geben periodische Bahnen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie eine Scheibe vom Radius r verfehlt.

- Es gibt also ein "leeres Gebiet" G, das aus endlich vielen parallelen, gleich breiten Streifen besteht, und *maximal* mit dieser Eigenschaft ist.

Leere Streifen geben periodische Bahnen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie eine Scheibe vom Radius r verfehlt.

- Es gibt also ein "leeres Gebiet" G, das aus endlich vielen parallelen, gleich breiten Streifen besteht, und *maximal* mit dieser Eigenschaft ist.
- Betrachte jetzt einen Punkt auf dem Rand von G, und starte dort.

Leere Streifen geben periodische Bahnen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie eine Scheibe vom Radius r verfehlt.

- Es gibt also ein "leeres Gebiet" G, das aus endlich vielen parallelen, gleich breiten Streifen besteht, und *maximal* mit dieser Eigenschaft ist.
- Betrachte jetzt einen Punkt auf dem Rand von G, und starte dort.
- Wir bleiben auf dem Rand von G, wegen der Maximalität von G.

Leere Streifen geben periodische Bahnen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie eine Scheibe vom Radius r verfehlt.

- Es gibt also ein "leeres Gebiet" G, das aus endlich vielen parallelen, gleich breiten Streifen besteht, und *maximal* mit dieser Eigenschaft ist.
- Betrachte jetzt einen Punkt auf dem Rand von G, und starte dort.
- Wir bleiben auf dem Rand von G, wegen der Maximalität von G.
- Also kehren wir zu einem der endlich vielen Randpunkte zurück.

Leere Streifen geben periodische Bahnen

Nehme jetzt an, dass eine Pacmanfamilie eine Scheibe vom Radius r verfehlt.

- Es gibt also ein "leeres Gebiet" G, das aus endlich vielen parallelen, gleich breiten Streifen besteht, und *maximal* mit dieser Eigenschaft ist.
- Betrachte jetzt einen Punkt auf dem Rand von G, und starte dort.
- Wir bleiben auf dem Rand von G, wegen der Maximalität von G.
- Also kehren wir zu einem der endlich vielen Randpunkte zurück.
- Das ist ein Widerspruch dazu, dass die Steigung irrational ist!

Antworten, endlich

Satz

Ein Billiardpfad im Quadrat kehrt zu seiner Startposition genau dann zurück wenn die Kugel mit rationalem Winkel angestoßen wird. Aus dem Winkel kann man errechnen, wie oft die Kugel vorher abprallt.

Satz

Jede Billiardbahn (Pacmanfamilie) die mit irrationalem Winkel angestoßen wird, ist dicht, d.h. kommt jedem Punkt des Tisches beliebig nahe.

Von Pacman zu Tori

Der Pacman-Prozess hat eine andere Interpretation.

Von Pacman zu Tori

Der Pacman-Prozess hat eine andere Interpretation.Nämlich:
Verklebe die Ränder des Quadrates, und erhalte

Von Pacman zu Tori

Der Pacman-Prozess hat eine andere Interpretation.Nämlich:
Verklebe die Ränder des Quadrates, und erhalte einen Torus!

Von Pacman zu Tori

Der Pacman-Prozess hat eine andere Interpretation.Nämlich: Verklebe die Ränder des Quadrates, und erhalte einen Torus!

Pacmanfamilien liefern dann (möglichst gerade) Kurven, die sich um den Torus winden und nie kreuzen

Von Pacman zu Tori

Der Pacman-Prozess hat eine andere Interpretation.Nämlich:
Verklebe die Ränder des Quadrates, und erhalte einen Torus!

Pacmanfamilien liefern dann (möglichst gerade) Kurven, die sich um den Torus winden und nie kreuzen – und sich schließen genau dann wenn die Bahn periodisch ist.

Andere Tische

Dasselbe funktioniert in einem Rechteck, gleichseitigen Dreieck, ...

Eine Überraschung?

Frage

Gibt es in jedem Dreieck eine geschlossene Billiardbahn?

Eine Überraschung?

Frage

Gibt es in jedem Dreieck eine geschlossene Billiardbahn?

Die Antwort auf diese Frage ist **unbekannt**!

Vielen Dank!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Vielen Dank!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

(draußen gibt es Kaffee, Tee, und Kekse!)

Vielen Dank!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

(draußen gibt es Kaffee, Tee, und Kekse!)

(und wenn Sie noch nicht genug haben – ich rede immer gerne über Mathematik...)