LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

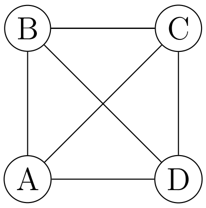
MATHEMATISCHES INSTITUT

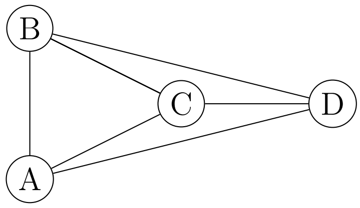
Prof. Dr. Hensel
Kajetan Söhnen

Übungsblatt 3 zu Einführung in Graphentheorie

Probestudium 2024
4. September 2024

Aufgabe 1 (Komplementärbereiche)**.** Wir betrachten folgende beide Graphen:





(i) Gib für beide Graphen die Knoten und die Kantenmenge an.

(ii) Wir stellen uns beide Graphen entsprechend der Skizze als Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ vor. Wie viele Komplementärbereiche erkennt man jeweils? Handelt es sich um einen Graph in der Ebene?

(iii) Diskutiere das Zusammenspiel von (i) und (ii). Was fällt auf?

Aufgabe 2 (Füllender Teilbäume)**.** Ziel der Aufgabe ist der Beweis von der Aussage in (iii). Diese besagt, dass jeder zusammenhängende Graph einen Baum enthält der alle Knoten beinhaltet. Beweise:

(i) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Baum. Dann ist für $v \in V$ und $x \notin V$, der Graph $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ mit $\widetilde{V} = V \cup \{x\}$ und $\widetilde{E} = E \cup \{\{v, x\}\}$ wieder ein Baum.

(ii) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ ein Teilgraph von G. Wenn $V \setminus \widetilde{V} \neq \emptyset$, dann gibt ein $v \in V$ und ein $w \in \widetilde{V}$ mit $\{v, w\} \in E$.

(iii) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann gibt es einen Teilbaum $\Gamma = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ von G mit $\widetilde{V} = V$.

Aufgabe 3 (Ein fehlerhafter Beweis)**.** Lese dir folgende Aussage und den angegebenen Beweis genau durch und markiere dabei Stellen, die dir unklar sind.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Eigenschaft, dass es keine isolierten Knoten gibt (das heißt in G gibt es für jeden Knoten $v \in V$ eine Kante $e \in E$ mit $v \in e$) und sodass $V = E + 1$. Dann ist G bereits ein Baum.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Knoten des Graphen. Für $n = 1$ gibt es nur einen Graphen und dabei handelt es sich offensichtlich um einen Baum.

Unter der Annahme, dass die Aussage für n gilt, beweisen wir die Aussage für $n + 1$. Der neue Graph mit $n + 1$ Knoten G_{n+1} entsteht aus einem Graphen G_n mit n Knoten durch hinzufügen eines weiteren Knoten. Weil G_n nach Induktionsvoraussetzung ein Baum ist, ist G_n zusammenhängend und enthält keine eingebettete Schleife. Nach unsere ursprünglichen Annahme wissen wir, dass der neue Knoten in G_{n+1} nicht isoliert sein darf und entsprechend müssen wir auch (mindestens) eine Kante hinzufügen, die den neuen Knoten mit dem restlichen Graphen verbindet. Außerdem betrachten wir ja nur Graphen die $|V| = |E| + 1$ erfüllen. Weil wir nur einen Knoten hinzugefügt haben, dürfen wir nicht mehr als eine Kante hinzufügen.

Das heißt G_{n+1} entsteht aus G_n durch hinzufügen von einem Knoten der mit genau einer Kante zu G_n verbunden ist. Weil G_n als Baum zusammenhängend und Schleifenfrei ist, ist also auch G_{n+1} zusammenhängend und schleifenfrei, also eine Baum.

Die Aussage folgt jetzt durch Induktion. □

(i) Finde ein Gegenbeispiel zur obigen Behauptung

(ii) Such den Fehler im Beweis.

Aufgabe 4 (*für Zuhause*)**.** Beweise folgende Aussage:

Wenn $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $V = E + 1$ ist, dann ist G bereits ein Baum.

Tipp: Eine Aufgabe von diesem Blatt kann sehr hilfreich sein.