LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

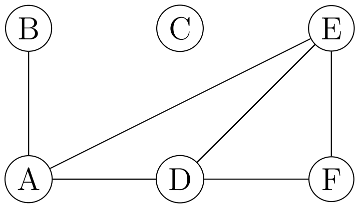
MATHEMATISCHES INSTITUT

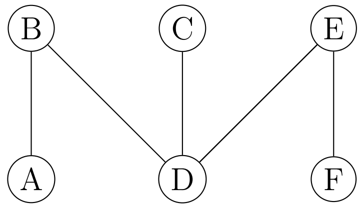
Prof. Dr. Hensel
Kajetan Söhnen

Übungsblatt 2 zu Einführung in Graphentheorie

Probestudium 2024
3. September 2024

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Graphen)**.** Wir betrachten folgenden Graphen





Beantworte folgende Fragen für beide Graphen zunächst intuitiv anhand der Skizzen und begründe deine Behauptung dann jeweils sauber mit Hilfe der Definitionen.

(i) Enthält der Graph eine eingebettete Schleife?

(ii) Ist der Graph zusammenhängend?

(iii) Wie lange ist der längste eingebettete Pfad?

Aufgabe 2 (Mögliche und unmögliche Graphen)**.** Zeichne je einen Graphen mit 5 Ecken der folgende Eigenschaften hat, oder begründe warum solch ein Graph nicht existiert.

(i) Mehr Kanten als Ecken

(ii) Alle Ecken haben Grad 2

(iii) Alle Ecken haben Grad 2 und mehr Kanten als Ecken

(iv) Eine eingebettete Schleife, aber nicht zusammenhängend

(v) Alle Ecken haben Grad 3

(vi) Zwei Ecken mit Grad 3 und keine eingebettete Schleife

(vii) Alle Ecken Grad 2 und nicht zusammenhängend.

Versuche aus den Argumente mit denen du begründet hast, dass ein Graph nicht existieren kann eine möglichst allgemeine Regel abzuleiten.

Aufgabe 3. Sei Γ ein Graph und a, b zwei verschiedene Ecken in Γ. Wenn es einen Pfad von a nach b gibt, dann gibt es auch einen Pfad ohne Umwege.

Beweis. Es seien $a, b \in \Gamma$ wie oben und $\alpha = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ der Pfad von a nach b. Wenn der Pfad keinen Umweg hat sind wir fertig.
Wir finden also mindestens einen Umweg, also ein k mit $\vec{e}_k = (v, w)$ und $\vec{e}_{k+1} = (w, v)$. Offensichtlich ist der Pfad

$$\widetilde{\alpha} = \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$$

immer noch ein Pfad von a nach b. Weil der ursprüngliche Pfad nur endlich viele Umwege enthalten kann, können wir dieses Argument so oft wiederholen bis der Pfad keine Umwege mehr enthält, was unsere Aussage beweist. □

Erkläre folgende Schritte so genau wie möglich:

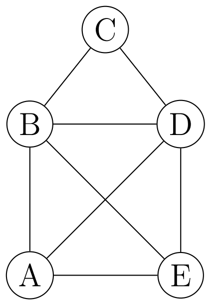
(i) Welche Werte kann k annehmen?

(ii) Warum ist $\widetilde{\alpha}$ immer noch ein Pfad von a nach b?

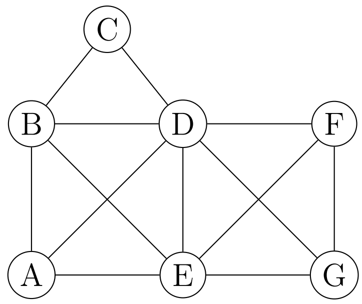
(iii) Warum kann α nur endlich viele Umwege enthalten?

(iv) Wie könnte man das "wir wiederholen das Argument oft genug" mathematisch sauber ausformulieren?

Aufgabe 4 (*für Zuhause*)**.** Wir erinnern uns an das Haus vom Nikolaus vom Blatt 1 und ergänzen es um einen Anbau für den Knecht Ruprecht (vgl. Skizze).



Haus von Nikolaus



Haus von Nikolaus und Knecht Rupprecht

(i) Beweise, dass man beim typischen Zeichnen des Hauses nur bei A und bei E anfangen kann. Das heißt: die einzigen Pfade, die alle Kanten genau einmal durchlaufen, beginnen in A oder E.

(ii) Kann man das Haus mit Anbau auf die gleiche Art zeichnen? Falls ja, an welchen Knoten kann man anfangen?