LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Hensel
Kajetan Söhnen

Übungsblatt 1 zu Einführung in Graphentheorie

Probestudium 2024
2. September 2024

Logik und Mengenlehre

Aufgabe 1 (Graphen)**.** (a) Male folgende Graphen $G = (V, E)$:

(i) mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{C, B\}\}$

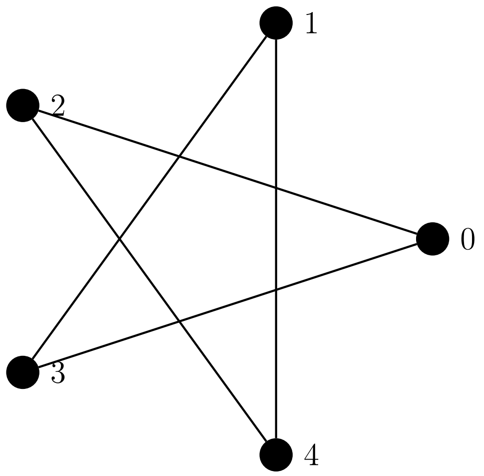
(ii) mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \mathbb{P}_2(V)$

(iii) mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}\}$

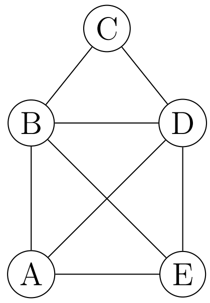
☆☆ (iv) mit $V = \{1, \ldots 9\}$ und $E = \{\{m, n\} \in \mathbb{P}_2(V) \mid m \text{ teilt } n\}$.

(b) Gib zu folgenden Graphen die Knoten und die Kantenmenge an:

(i)



(ii)



Aufgabe 2 (Mengen)**.** Verbinde jeweils die gleichen Mengen.

(a) $\{1, 2, 3\}$

(b) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

(c) $\{1, 3\} \times \{1, 2\}$

(d) $\mathbb{P}(\{1, 3\})$

(e) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2\}$

(f) $\mathbb{P}_2(\{1, 2, 3\})$

(i) $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

(ii) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$

(iii) $\{(1, 2), (3, 2), (1, 1), (1, 2), (3, 1)\}$

(iv) $\{\{3\}, \{2\}, \{1\}\}$

(v) $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2\}$

(vi) $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, \{1\}\}$

(vii) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}\}$

Aufgabe 3 (Argumentieren und Beweisen)**.** Wir spielen Sudoku. Dabei haben wir die Regeln wie folgt formalisiert:

(A) In jeder Zeile kommt jede Ziffer zwischen 1 und 9 genau einmal vor.

(B) In jeder Spalte kommt jede Ziffer zwischen 1 und 9 genau einmal vor.

(C) In jedem Kästchen kommt jede Ziffer zwischen 1 und 9 genau einmal vor.

Löse folgendes Sudoku. Achte dabei besonders genau darauf, welche Regeln du wann verwendest und welche Beweis- bzw. Argumentationstechniken du anwendest.

4		7	1	2		6		
2	3	1		5	9	7		
	9				4	5	1	2
	4	8	7				2	1
7		3	9	8		4		6
6	2		5	4		8	7	
	6	5	8		3			7
9		2		1		3	6	5
3	7	4		6		1	9	8

1			4	2	3	5	9	
	5	4						
		9			8			4
3	2							
4		7				8	2	
		8		4			7	
5	9	2				7	8	
7						6	4	
6		3						1

Aufgabe 4 (Induktion)**.**

(i) Wir nennen einen Graphen vollständig, wenn alle Knoten direkt miteinander verbunden sind.

Beweise mit Induktion, dass K_n, der vollständige Graph mit n Knoten, $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten hat.

☆ (ii) Wie viele Kanten hat der vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$?

Aufgabe 5 (*für Zuhause*)**.** Beweise, dass $n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, indem du...

(i) eine Fallunterscheidung nutzt,

(ii) Induktion verwendest,

(iii) einen Widerspruchsbeweis führst.

Hierbei heißt eine natürliche Zahl m genau dann gerade, wenn man sie als $m = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$ schreiben kann.