Tutoriumsblatt 1 zu Funktionentheorie

20.04–26.04

Bemerkung: Auf den Übungsblättern, bzw. Tutoriumsblättern unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den dazugehörigen Vektorfeldern $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1:
Prüfen Sie in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|$

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ oder $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass $|a_n| \leq \frac{c}{n!} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (\mathrm{Re}\, z)^3(\mathrm{Im}\, z)^2 + i(\mathrm{Re}\, z)^2(\mathrm{Im}\, z)^3$

Aufgabe 2:

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man beweise für $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &f'(z) = \alpha f(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow &f(z) = ce^{\alpha z}, \ \ c \in \mathbb{C}, \ \ \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachte $g(z) = f(z)e^{-\alpha z}$.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man beweise:

$$\begin{aligned} &f(0) = 1 \ \text{ und } \ f(z+w) = f(z)f(w) \ \ \forall z, w \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow &f(z) = e^{\alpha z}, \ \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \ \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $z \to f(z+w)$ bei festem, aber beliebigem $w \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Es folgt, dass $z \to e^z$ die einzige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist, sodass

- *f holomorph auf $\mathbb{C}$*
- $f(0) = 1$
- $f' = f$

Aufgabe 3:

(a) Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in $z \in int(\Omega)$ mit $l = f'(z) \in \mathbb{C}$

(ii) Es existiert eine Funktion $\rho : \Omega \to \mathbb{C}$ und eine komplexe Zahl $l \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(w) = f(z) + l(w - z) + \rho(w) \ \ \forall w \in \Omega$$

wobei

$$\frac{\rho(w)}{w - z} \to 0 \ \text{ falls } \ w \to z$$

(iii) Es existiert eine Funktion $r : \Omega \to \mathbb{C}$ und eine komplexe Zahl $l \in \mathbb{C}$, sodass

$$f(z+\xi) = f(z) + l\xi + r(\xi) \ \ \forall \xi \in \Omega$$

wobei

$$\frac{r(\xi)}{\xi} \to 0 \text{ falls } \xi \to 0$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z \in int(\Omega)$. Zeigen Sie, dass f dann auch stetig in z ist.