Prof. Dr. Peter Otte
Tom Bachmann, Sebastian Gottwald

Wintersemester 2013/14
18.02.2014

Analysis für Informatiker und Statistiker
Modulprüfung

Lösungsvorschlag

Name: ....

Pseudonym

Aufgabe 1. [20 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. [2 Punkte]

Beweis. Wegen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$ folgt $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. □

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha > 0$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leqslant \frac{1}{2}(\alpha\, a^2 + \alpha^{-1} b^2)$. [2 Punkte]

Beweis. Da $\alpha > 0$ folgt aus (a), dass $ab = (\alpha^{1/2} a)\,(\alpha^{-1/2} b) \leqslant \frac{1}{2}(\alpha\, a^2 + \alpha^{-1} b^2)$. □

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen reeller Zahlen und $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$, $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$, mit $0 < A < \infty$ und $0 < B < \infty$. Beweisen Sie (zum Beispiel unter Verwendung von (b) mit $\alpha = \sqrt{B/A}$), dass

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} .$$

[4 Punkte; hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; Sie dürfen die Dreiecksungleichung für endliche Summanden verwenden, d.h. $|\sum_{n=0}^{N} c_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |c_n|$ für $N \in \mathbb{N}$ und $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$.]

Beweis. Aus (b) mit $\alpha = \sqrt{B/A}$ folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|a_n||b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\; a_n^2 + \sqrt{\frac{A}{B}}\; b_n^2\right)$$

und damit gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{B}{A}} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sqrt{\frac{A}{B}} \sum_{n=1}^{N} b_n^2\right) .$$

Die rechte Seite konvergiert für $N \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}(\sqrt{BA} + \sqrt{AB}) = \sqrt{AB}$. Insbesondere ist also $(\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n|)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt und somit konvergent (da monoton wachsend), d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut. Aus der angegebenen Dreiecksungleichung, den Grenzwertsätzen (Monotonie der Grenzwertbildung) und der Stetigkeit der Betragsfunktion folgt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| = \lim_{N\to\infty} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant \sqrt{AB} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} ,$$

was den Beweis abschließt. □

(d) Zeigen Sie, dass

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} ,$$

falls $-1 < x < 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. [4 Punkte]

Beweis. Da $|x| < 1$ und somit $x^2 < 1$ (Monotonie von $x \mapsto x^2$ auf $(0, \infty)$) ergibt sich für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$. Damit sind die Voraussetzungen aus Teilaufgabe (c) erfüllt und es folgt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}$$

□

(e) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left| \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} \right)^{1/2} x^n \, dx \right| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{c_0}} ,$$

für jede monotone Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit $c_0 > 0$ und $\lim_n c_n = \infty$. [8 Punkte; Sie dürfen verwenden, dass für $-1 < x < 1$ gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.]

Beweis. Jede monotone Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} c_n = \infty$ ist monoton steigend. Deshalb folgt insbesondere, dass $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen $c_0 > 0$) und außerdem, dass $\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} > 0$. Weiter gilt: Da $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c_n > \varepsilon^{-1}$ für alle $n \geqslant n_0$, d.h. $c_n^{-1} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Also ist $\lim_{n \to \infty} c_n^{-1} = 0$. Es folgt

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} \right) = \frac{1}{c_0} - \frac{1}{c_N} \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{c_0} \tag{$*$}$$

womit die Voraussetzungen für Teilaufgabe (d) erfüllt sind. Wegen $|\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f|$ folgt

$$\left| \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} \right)^{1/2} x^n \, dx \right| \leqslant \int_{-1}^{1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} \right)^{1/2} x^n \right| dx \overset{(d),(*)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{c_0}} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Die Behauptung folgt nun aus $\int_{-1}^{1} \arcsin'(x) dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. □

Name: ....

Aufgabe 2. [20 Punkte]

(a) Beweisen Sie für $x > 0$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dass $\int_0^x \cos(kt)\,dt = \frac{1}{k}\sin(kx)$. [2 Punkte]

Beweis. Da $\frac{d}{dx}\sin(kx) = k\cos(kx)$, ist $x \mapsto \frac{1}{k}\sin(kx)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \cos(kx)$. Die Behauptung folgt somit aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und $\sin(0) = 0$. $\square$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} = \sin(a)\sin(b).$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]

Beweis. Unter Benutzung des Additionstheorems $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ und $\sin(-y) = -\sin(y)$ folgt

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = \sin(a)\sin(b) + \sin(a)\sin(b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

Alternativ: Wegen $e^{ib} - e^{-ib} = 2i\sin(b)$ und

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = \mathrm{Re}\left(e^{i(a-b)} - e^{(a+b)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ia}(e^{-ib} - e^{ib})\right) = -2\sin(b)\,\mathrm{Re}\left(ie^{ia}\right)$$

folgt die Aussage aus $ie^{ia} = i\cos(a) - \sin(a)$. $\square$

(c) Beweisen Sie, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \;=\; \delta_{mn} \;:=\; \begin{cases} 1 & , \; n = m \\ 0 & , \; n \neq m \end{cases}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. [6 Punkte]

Beweis. Aus (b) folgt $2\sin(nx)\sin(mx) = \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)$ und aus (a)

$$\int_0^\pi \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+m}\sin((n+m)\pi) = 0\,,$$

sowie

$$\int_0^\pi \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \pi & , \; n = m \\ 0 & , \; n \neq m \end{cases}\quad,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(0) = 1$ und $\int_0^\pi dx = \pi$. $\square$

(d) Sei nun $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(nx)$ für $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

für alle $m \in \{1, \ldots, N\}$. [4 Punkte]

Beweis. Aus der Linearität des Integrals und (c) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n\delta_{mn} = a_m$$

wobei die letzte Gleichung direkt aus der Definition von δ_{mn} folgt und aus der Tatsache, dass genau ein Term in der Summe dem Fall $n = m$ entspricht (denn $1 \leqslant m \leqslant N$). □

(e) Beweisen Sie, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2\,dx \;=\; \sum_{n=1}^N a_n^2$$

wobei f die Funktion aus Teilaufgabe (c) ist. [4 Punkte]

Beweis. Aus der Linearität und Teilaufgabe (d) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)f(x)\,dx = \sum_{n=1}^N a_n\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(d)}{=} \sum_{n=1}^N a_n^2$$

Alternativ: Aus Teilaufgabe (c) folgt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)^2\,dx = \sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N a_n a_m \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \overset{(c)}{=} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m\delta_{mn} = \sum_{n=1}^N a_n^2$$

□

Name: ....

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Wann nennt man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig* in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$? [2 Punkte]

Lösung. f heißt stetig in $a \in \mathbb{R}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $|x-a| < \delta$ folgt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Alternativ (Folgenstetigkeit): f ist stetig in a, falls für jede Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (und $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt $\lim_n f(x_n) = f(a)$. □

(b) Zeigen Sie, dass h stetig ist. [3 Punkte]

Beweis. h ist in $x \neq 0$ nach den Sätzen über die Verknüpfung stetiger Funktionen stetig, denn die Funktionen $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto 1/x$ und $x \mapsto \sin(x)$ sind stetig in $x \neq 0$, und $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig in $x \geqslant 0$, also im Wertebereich von $x \mapsto |x|$. Betrachten wir also die Stelle $x = 0$: Sei $(x_n)_n$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$0 \leqslant |h(x_n)| = |x_n|\sqrt{|x_n|}\left|\sin\tfrac{1}{x_n}\right| \leqslant |x_n|\sqrt{|x_n|}\,.$$

Die rechte Seite konvegiert nach den Grenzwertsätzen (und der Stetigkeit der Wurzelfunktion) gegen 0. Also ist $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 0$ (z.B. nach dem Einschachtelungsprinzip). □

(c) Zeigen Sie, dass h für $x > 0$ differenzierbar ist, mit Ableitung

$$h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$$

für alle $x > 0$. [4 Punkte]

Beweis. Für $x > 0$ ist $h(x) = x\sqrt{x}\sin(1/x)$. Da die Funktionen $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $x > 0$ differenzierbar sind, folgt die Differenzierbarkeit von h in $x > 0$ aus der Ketten- und der Produktregel und es gilt

$$h'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)\sin\frac{1}{x} - x\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$$

für alle $x > 0$. □

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n := (2\pi n+\pi)^{-1}$. Zeigen Sie, dass $(h'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. [3 Punkte]

Beweis. Es ist $\sin(1/x_n) = \sin((2n+1)\pi) = 0$ und $\cos(1/x_n) = -\cos(2\pi n) = -1$, also folgt aus (c) (wegen $x_n > 0$), dass $h'(x_n) = \sqrt{2\pi n+\pi}$, was aufgrund der Unbeschränktheit der Wurzelfunktion unbeschränkt ist. □

(e) Beweisen Sie, dass h auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [5 Punkte]

Beweis. Für $x < 0$ ist h aus demselben Grund differenzierbar, wie für $x > 0$, und es gilt

$$h'(x) = \left(\sqrt{-x} - \frac{x}{2\sqrt{-x}}\right) \sin\frac{1}{x} - x\sqrt{-x}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = \frac{3}{2}\sqrt{-x}\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}\cos\frac{1}{x}$$

für alle $x < 0$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 \leqslant \left|\frac{h(x_n) - h(0)}{x_n - 0}\right| = \sqrt{|x_n|}\left|\sin\frac{1}{x_n}\right| \leqslant \sqrt{|x_n|}$$

Da $\lim_n \sqrt{|x_n|} = 0$, konvergiert der Differenzenquotient auf der linken Seite gegen 0, d.h. insbesondere ist h an der Stelle $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung $h'(0) = 0$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass h differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist mit

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x} - \frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{|x|}}\cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

(*f*) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion h' stetig in x ist. [3 Punkte]

Beweis. Die Ableitung h' ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig in $x \neq 0$. h' ist allerdings nicht stetig in $x = 0$, wie die Wahl der Folge $x_n = (2\pi n + \pi)^{-1}$ aus Teilaufgabe (*d*) zeigt: Es gilt $\lim_n x_n = 0$, aber $(h'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, und kann somit nicht (gegen 0) konvergieren. □

Name: ....

Aufgabe 4. [20 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. [3 Punkte]

Beweis. Es gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und somit $(\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$. □

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen, sowie $h(x) := f(x)g(x)$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[6 Punkte; hierbei bezeichnet $f^{(n)}$ die n-fache Ableitung einer Funktion f und $n!$ bezeichnet die Fakultät von n, also $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$.]

Beweis. Wir verwenden Induktion auf n. Sind f, g einmal differenzierbar, dann gilt nach der Produktregel, dass $(fg)' = f'g + fg' = \frac{1!}{1!0!} f^{(1)} g^{(0)} + \frac{0!}{0!1!} f^{(0)} g^{(1)}$, was die zu zeigende Behauptung für den Fall $n = 1$ ist.

Seien nun f, g jeweils $n + 1$ mal differenzierbar. Aus der Induktionshypothese folgt, dass

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Auf der rechten Seite ist die höchste vorkommende Ableitung n. Somit handelt es sich um eine Komposition differenzierbarer Funktionen und wir können noch ein weiteres mal ableiten:

$$\begin{aligned}
h^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{n!}{(l-1)!\,((n+1)-l)!} f^{(l)} g^{((n+1)-l)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} \\
&\quad + \frac{n!}{n!\,(n-n)!} f^{(n+1)} g^{(n-n)} + \frac{n!}{0!\,(n-0)!} f^{(0)} g^{(n-0+1)}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Summe aufgespaltet, einmal $k + 1$ durch l ersetzt, und jeweils die Randterme separat geschrieben (damit l und k denselben Summationsbereich haben). Wir können nun l wieder in k umbenennen, und die Summen zusammenfassen. Wir berechnen folgenden Koeffizienten:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,((n+1)-k)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n!) + (n+1-k)\,(n!)}{k!\,((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!}.$$

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h^{(n+1)} &= f^{(0)}g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} f^{(k)}g^{((n+1)-k)} + f^{(n+1)}g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} f^{(k)}g^{((n+1)-k)},
\end{aligned}
$$

was den Induktionsschritt abschließt. □

(c) Es sei seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = e^{bx}$, $h(x) = e^{(a+b)x}$. Zeigen Sie, dass $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$, $g^{(n)}(x) = b^n e^{bx}$ und $h^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x}$. Berechnen Sie $h^{(n)}(0)$ mithilfe von Teilaufgabe (b) und schlussfolgern Sie, dass

$$
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{$*$}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. [4 Punkte]

Beweis. Es gilt $f^{(0)}(x) = f(x) = a^0 f(x) = a^0 e^{ax}$. Sei induktiv $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$. Dann folgt aus der Kettenregel, Produktregel, Konstantenregel und $\exp' = \exp$, dass $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' = a^n \cdot a e^{ax} = a^{n+1} e^{ax}$. Die behauptete Formel für $f^{(n)}$ folgt also für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion; die Formeln für g und h sind vollkommen analog. Aus (b) erhalten wir

$$
h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k e^{ax} b^{n-k} e^{bx}
$$

und somit

$$
(a+b)^n = h^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k},
$$

da $e^0 = 1$. □

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(i^k) = (-1)^{k/2}$ für gerade k und $\mathrm{Re}(i^k) = 0$ für ungerade k. [2 Punkte]

Beweis. Da jede natürliche Zahl als $k = 4l + r$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ geschrieben werden kann, ist es hinreichend und notwendig zu zeigen, dass $Re(i^{4l+0}) = (-1)^{(4l+0)/2} = (-1)^{2l} = 1$, $Re(i^{4l+1}) = 0$, $Re(i^{4l+2}) = (-1)^{(4l+2)/2} = (-1)^{2l+1} = -1$ und $Re(i^{4l+3}) = 0$. Aber es gilt $i^{4l} = \left(i^4\right)^l = 1^l = 1$ und somit $i^{4l+r} = i^{4l} i^r = i^r$. Es ist also hinreichend, den Fall $l = 0$ zu betrachten; in diesem Fall sind die Behauptungen trivial. □

(e) Sie dürfen nun annehmen, dass $(*)$ auch für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie unter Verwendung von (a) und (d), dass

$$
\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!} \sin(x)^{2k} \cos(x)^{n-2k}
$$

für alle *geraden* $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. [5 Punkte]

Beweis. Wir schreiben abkürzend $C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ und berechnen:

$$\begin{aligned}
\cos nx &= Re(\cos nx + i \sin nx) \\
&\overset{(a)}{=} Re\,(i \sin x + \cos x)^n \\
&\overset{(c)}{=} Re\left(\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(i\sin(x))^k \cos(x)^{(n-k)}\right) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \sin(x)^k \cos(x)^{n-k} Re\left(i^k\right) \\
&\overset{(d)}{=} \sum_{l=0}^{n/2} C_{n,2l} \sin(x)^{2l} \cos(x)^{n-2l} (-1)^l.
\end{aligned}$$

Hier haben wir in (1) verwendet, dass $Re(z)$ über $\mathbb{R}$ linear ist (also $Re(az+bw) = aRe(z)+bRe(w)$ für $z, w \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$), dass $(xy)^n = x^n y^n$ und dass $C_{n,k}$, $\cos x$ und $\sin x$ reell sind. Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass nach (d) in der vierten Zeile nur Terme mit k gerade übrig bleiben. Wir summieren daher über $k = 2l$, für l von 0 bis $n/2$ (was eine ganze Zahl ist, da n gerade ist). Schließlich haben wir noch einmal (d) benutzt, in der Form $Re(i^{2l}) = (-1)^l$. Die letzte Zeile ist die zu zeigende Gleichung (wenn man l wieder in k umbenennt). $\square$