Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Peter Otte
WiSe 2013/14

Tom Bachmann
Sebastian Gottwald
18.12.2013

Übungen zur Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

für Zwischen den Jahren

Zum Begriff 'Probeklausur': *Die Klausur wird sich inhaltlich (da noch nicht alle Themen in der Vorlesung behandelt wurden) und vom Umfang deutlich von diesem Aufgabenblatt unterscheiden. Genauer gesagt, wird die Klausur aus weniger sowie inhaltlich klar abgegrenzten Aufgaben bestehen, sodass Sie jeweils genau wissen, was zu zeigen ist und welche Voraussetzungen Sie annehmen dürfen.*

Folgende Aufgaben entsprechen also qualitativ aber nicht quantitativ möglichen Fragestellungen in der Klausur. Die Bearbeitung dieser Aufgaben soll Ihnen einerseits eine Orientierung dafür geben, wie der Schwierigkeitsgrad der Klausur einzuschätzen ist. Andererseits ist es eine gute Möglichkeit, die freie Zeit zu nutzen, um den bisherigen Vorlesungsstoff zu wiederholen. Sie werden feststellen, dass vor Allem das Verständnis von grundlegenden Konzepten der Analysis, sowie geringfügige Rechenfertigkeiten gefordert sind. Sie dürfen dabei alle in der Vorlesung bewiesenen Aussagen verwenden, wenn Sie diese korrekt zitieren. Alle anderen Behauptungen sind zu beweisen.

1. Seien A und B Aussagen. Entscheiden Sie mithilfe einer Wahrheitstafel, ob die Aussage

$$\Big(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\Big) \Leftrightarrow A$$

eine Tautologie ist. [2 Punkte]

2. Sei X eine Menge und A, B Teilmengen von X. Zeigen Sie:

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A$$

Kommen Sie dabei mit drei Implikationen aus. [4 Punkte]

3. Schreiben Sie die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$ in aufzählender Notation (d.h. $\{\dots\}$). [2 Punkte]

4. Beweisen Sie: $\sup\left\{\frac{n^4}{4^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{81}{64}$. [3 Punkte]

5. Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(*a*) $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \frac{1}{2}\big(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2\big)$ [3 Punkte; *Tipp:* Zweite binomische Formel]

(*b*) *Nehmen wir an, dass* $a_k \neq 0 \neq b_k$ *für mindestens ein* $k \in \{1, \dots, n\}$ *und definieren*

$$\alpha_k := \frac{|a_k|}{\big(\sum_{k=1}^n a_k^2\big)^{1/2}}\,,\ \beta_k := \frac{|b_k|}{\big(\sum_{k=1}^n b_k^2\big)^{1/2}} \qquad \forall k \leqslant n, \qquad (*)$$

dann gilt $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1 = \sum_{k=1}^n \beta_k^2$. [2 Punkte]

(*c*) *Seien nun* α_k *und* β_k *wie in* $(*)$ *durch* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *für* $k \leqslant n$ *definiert, dann folgt* $\sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k \leqslant 1$. [1 Punkt]

(*d*) *Wir schließen* $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \big(\sum_{k=1}^n a_k^2\big)^{1/2}\big(\sum_{k=1}^n b_k^2\big)^{1/2}$. [2 Punkte]

6. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \,.$$

[4 Punkte; *Tipp:* Induktion]

7. Beweisen oder widerlegen Sie: *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit Häufungspunkten* a *und* b*, dann ist* $a+b$ *ein Häufungspunkt der Folge* $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [3 Punkte]

8. Zeigen Sie: *Ist die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, so ist* $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.* Warum ist die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen falsch? [5 Punkte]

9. Beweisen Sie: *Für* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < 1$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$, mit anderen Worten: x^n *konvergiert schneller gegen* 0*, als* $\frac{1}{n}$.

[5 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie den binomischen Satz, d.h. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, um $(1+h)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} h^2$ für alle $h > 0$ und $n \geqslant 2$ zu zeigen.]

10. (*a*) Sei $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie mithilfe von vollständiger Induktion [3 Punkte]

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(*b*) Folgern Sie für $|q| < 1$, dass $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)^{-1}$. [3 Punkte]

(*c*) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+3i}\right)^k$. [2 Punkte]

11. (*a*) Definieren Sie den Begriff *Cauchy-Folge.* [1 Punkt]

(*b*) Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen, und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$s_n := b_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^2} \,.$$

Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. [6 Punkte]

12. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2k}{k^2(k+1)^2}$. [4 Punkte; *Tipp:* Was ist $(\Delta b)_k := b_k - b_{k-1}$ für $b_k := \frac{1}{(k+1)^2}$?]

13. Zeigen Sie die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, wobei $a_n := n^{-1}\sqrt{n + \frac{1}{n}}$. [5 Punkte]

14. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k$. [3 Punkte; *Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_n \sqrt[n]{a}$ für alle $a > 0$.]

15. Ist die Funktion f auf $\mathbb{Q}$, definiert durch

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \begin{cases} 0\,, & x < \sqrt{2} \\ 1\,, & x > \sqrt{2} \end{cases} \,,$$

stetig? Beweisen Sie Ihre Aussage. [4 Punkte]

16. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $y \in D$ mit $f(y) \neq 0$. Beweisen Sie, dass f dann sogar in einer Umgebung von y ungleich null ist, d.h. *es gibt* $\delta > 0$*, sodass* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in D$ *mit* $|x-y| < \delta$. [5 Punkte]

17. Beweisen Sie: *Ist* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig, dann ist auch* $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ *stetig.* [2 Punkte]

18. Ist $c_n := 2^{-n/2}(1+i)^n$ dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [0, 2\pi)$ mit $c_n = e^{ix_n}$. [2 Punkte]

19. Zeigen Sie, dass es $x \in [1, 2]$ gibt, sodass die Gleichung $x^3 = x^2 + x + 1$ erfüllt ist. [4 Punkte]

20. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Geben Sie eine zur Definition äquivalente Formulierung der Aussage f *ist differenzierbar in* $a \in D$ *mit Ableitung* $f'(a)$, unter der Benutzung von Differenzenquotienten. Wann nennt man f differenzierbar? [2 Punkte]

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ differenzierbar ist und finden Sie die Ableitung g' (ohne die Quotientenregel, direkt mit (a)). [3 Punkte]

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)^4 - \cos(x)^4$. [3 Punkte]

21. (a) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$s_n \; := \; \sum_{k=0}^{n} kx^k = x \, \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) .$$

[4 Punkte; *Bemerkung:* Man schreibt $\frac{d}{dx} f(x) := f'(x)$.]

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{2014} kx^k < \frac{x}{(1 - x)^2}$$

im Fall $0 < x < 1$. [5 Punkte; *Tipp:* Benutzen Sie Aufgabe 9 um $\lim_{n\to\infty} s_n$ zu berechnen.]

Ihre Lösung zu diesem Blatt wird <u>*nicht*</u> *korrigiert. Stattdessen werden wir Anfang Januar einen Lösungsvorschlag online stellen. Eventuelle Fragen zu diesen Lösungen können bei Bedarf in den Übungsgruppen besprochen werden. Die Angabe von Punktzahlen dient nur der groben Orientierung.*